

Efternamn Förnamn Personnummer Program

.....
| 1 | 2 | 3 | Summa | Betyg |

KTH Matematik

SF1633, Differentialekvationer I.

Kontrollskrivning nr 1, måndagen den 15 september 2008, kl 09.00-10.00.

BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. Klassificera med avseende på stabilitet/instabilitet de stationära lösningarna till den autonoma differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = y(y-1)$.

Bestäm de startvärden y_0 för vilka $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ är ändligt.

.....

Lösningförslag:

De stationära lösningarna erhålles då derivatan är lika med noll.

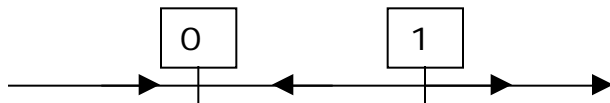
Vi får de stationära lösningarna $y_1 = 0$ och $y_2 = 1$.

En teckenstudie av derivatan ger information rörande stabiliteten.

Nu över till studie av derivatans tecken.

För $y < 0$ och $y > 1$ är derivatan positiv och $y(x)$ är växande.

För $0 < y < 1$ är derivatan negativ och $y(x)$ är avtagande.



Den stationära lösningen $y_1 = 0$ är stabil och den stationära lösningen $y_2 = 1$ är instabil.

$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ är ändligt för $\{y_0 : y_0 \leq 1\}$.

SVAR: $y_1 = 0$ är stabil och $y_2 = 1$ är instabil. $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ är ändligt för $\{y_0 : y_0 \leq 1\}$.

2. En tank innehåller 300 liter vatten i vilket 1800 gram salt har lösts. En annan saltlösning med koncentrationen 5 gram per liter pumpas in med hastigheten 2 liter per minut. Den välblandade lösningen pumpas ut med hastigheten 3 liter per minut. Ställ upp en differentialekvation som beskriver detta förlopp. Bestäm saltmängden som funktion av tiden.

.....
 Lösningförslag:

Låt $A(t)$ vara saltmängden i tanken vid tiden t .

Vi erhåller följande differentialekvation för saltmängden

$$\frac{dA(t)}{dt} = 2 \cdot 5 - 3 \frac{A(t)}{300 - t(3 - 2)} .$$

Detta är en linjär differentialekvation av första ordningen.

Vi löser den med hjälp av en integrerande faktor.

Omskrivning av differentialekvationen ger:

$$\frac{dA(t)}{dt} + \frac{3}{300 - t} A(t) = 10 .$$

Multiplisera med en integrerande faktor: $(300 - t)^{-3}$.

$$(300 - t)^{-3} \frac{dA(t)}{dt} + 3(300 - t)^{-4} A(t) = 10(300 - t)^{-3}$$

Detta kan skrivas:

$$\frac{d}{dt} \{ A(t)(300 - t)^{-3} \} = 10(300 - t)^{-3} .$$

Integrera med avseende på t .

$$A(t)(300 - t)^{-3} = 5(300 - t)^{-2} + C .$$

Villkoret $A(0) = 1800$ ger:

$$1800(300)^{-3} = 5(300)^{-2} + C, \quad C = (300)^{-2} .$$

Insättning ger:

$$A(t) = 5(300 - t) + \frac{(300 - t)^3}{(300)^2}$$

Observera att tanken blir tom efter 300 minuter.

SVAR: Saltmängden ges av

$$A(t) = 5(300 - t) + \frac{(300 - t)^3}{(300)^2} .$$

3. Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen $y' = y(y-1)$.
Dock behöver ej konstantlösningarna anges.

Bestäm därefter den lösning som uppfyller villkoret

a) $y(0) = 2$ b) $y(0) = \frac{1}{2}$

Ange lösningens existensintervall och vad som händer då x växer.

.....
Lösningförslag

Vi omformar differentialekvationen: $\frac{1}{y(y-1)}y' = 1$.

Partialbråksuppdelning ger: $-\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} y' = 1$.

Integrera med avseende på x .

$$-\ln|y| + \ln|y-1| = x + \ln|C_1|$$

Lös ut y : $\frac{y-1}{y} = \pm C_1 e^x = C e^x$, $1 - \frac{1}{y} = C e^x$, $\frac{1}{y} = 1 - C e^x$, $y = \frac{1}{1 - C e^x}$.

a) $y(0) = 2$ ger: $C = \frac{1}{2}$ vilket ger $y = \frac{2}{2 - e^x}$ och existensintervallet $\{x : x < \ln 2\}$.

Då x växer från noll kommer y att växa obegränsat då x går mot $\ln 2$.

b) $y(0) = \frac{1}{2}$ ger: $C = -1$ vilket ger $y = \frac{1}{1 + e^x}$ och existensintervallet $\{x : x \in \mathbb{R}\}$.

Då x växer från noll kommer y att gå mot noll då x växer obegränsat.

SVAR: Den allmänna lösningen är $y = \frac{1}{1 - C e^x}$.

a) $y = \frac{2}{2 - e^x}$, existensintervallet $\{x : x < \ln 2\}$ och y växer obegränsat.

b) $y = \frac{1}{1 + e^x}$, existensintervallet $\{x : x \in \mathbb{R}\}$ och y går mot noll.

Anmärkning: Jämför uppgift 1 och uppgift 3.