Efternamn Förnamn Personnummer Program

………………………… ………………………… …………………………
…………………………

| 1 | 2 | 3 | Summa | Betyg |

KTH Matematik
SF1633, Differentialekvationer I.
Kontrollskrivning nr 2, måndagen den 22 september 2008, kl 09.00-10.00.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 4y' + 3y = 4e^{-3t}$ som uppfyller villkoren $y(0) = 4$ och $y'(0) = -4$.

…………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:
Vi Laplacetransformerar differentialekvationen.

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 3Y(s) = 4\frac{1}{s+3}$$

Insättning av begynnelsevillkoren ger.

$$s^2Y(s) - 4s + 4 + 4(sY(s) - 4) + 3Y(s) = 4\frac{1}{s+3}$$

Lös ut $Y(s)$.

Vi får $(s^2 + 4s + 3)Y(s) = 4s + 12 + 4\dfrac{1}{s+3}$ eller $Y(s) = \dfrac{4}{s+1} + 4\dfrac{1}{(s+1)(s+3)^2}$.

Återtransformering ger: $y(t) = 4e^{-t} + 4\dfrac{e^{-t} - e^{-3t} - 2te^{-3t}}{4} = 5e^{-t} - e^{-3t} - 2te^{-3t}$.

SVAR: Den lösning som uppfyller differentialekvationen och begynnelsevillkoren är $y(t) = 5e^{-t} - e^{-3t} - 2te^{-3t}$.

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 4y = 2\delta(t - \frac{\pi}{2})$,

som uppfyller villkoren $y(0) = 3$ och $y'(0) = 6$.

Beräkna även $y(\frac{\pi}{4})$ och $y(\frac{3\pi}{4})$. $\delta(t)$ är Diracs deltafunktion.

....

Lösningsförslag:

Vi Laplacetransformerar differentialekvationen.

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = 2e^{-\frac{\pi}{2}s}$$

Insättning av begynnelsevillkoren ger.

$$s^2Y(s) - 3s - 6 + 4Y(s) = 2e^{-\frac{\pi}{2}s}$$

Lös ut $Y(s)$.

Vi får $(s^2 + 4)Y(s) = 3s + 6 + 2e^{-\frac{\pi}{2}s}$ eller $Y(s) = \frac{3s+6}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4}e^{-\frac{\pi}{2}s}$.

Återtransformering ger: $y(t) = 3\cos 2t + 3\sin 2t + U(t - \frac{\pi}{2})\sin 2(t - \frac{\pi}{2})$.

Det återstår att beräkna två funktionsvärde och använder därvid definitionen av Heavisides funktion.

$$y(\frac{\pi}{4}) = 3\cos\frac{\pi}{2} + 3\sin\frac{\pi}{2} + U(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})\sin 2(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) = 3$$

$$y(\frac{3\pi}{4}) = 3\cos\frac{3\pi}{2} + 3\sin\frac{3\pi}{2} + U(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2})\sin 2(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) = -3 + 1 = -2$$

SVAR: Den lösning som uppfyller differentialekvationen och begynnelsevillkoren är $y(t) = 3\cos 2t + 3\sin 2t + U(t - \frac{\pi}{2})\sin 2(t - \frac{\pi}{2})$.

Vidare är de sökta funktionsvärdena $y(\frac{\pi}{4}) = 3$ och $y(\frac{3\pi}{4}) = -2$.

3. Bestäm $f(t)$ då $f(t) = 4\int_0^t \cos 2u \; f(t-u)du + 3\sin 2t,\ t \geq 0$.

Vidare skall villkoret $f(0) = 0$ vara uppfyllt.

....

Lösningsförslag:

Vi Laplacetransformerar integralekvationen.

$$F(s) = 4\frac{s}{s^2+4}F(s) + 3\frac{2}{s^2+4}$$

Lös ut $F(s)$.

Vi får $(1 - 4\frac{s}{s^2+4})F(s) = 3\frac{2}{s^2+4}$ eller $F(s) = \frac{6}{(s-2)^2}$.

Återtransformering ger: $f(t) = 6te^{2t}$.

Det givna villkoret är uppfyllt.

SVAR: Integralekvationen har lösningen $f(t) = 6te^{2t}$.