Efternamn Förnamn Personnummer Program

……………… ………………… ……………… ………………

| 1 | 2 | 3 | Summa | Betyg |

KTH Matematik
SF1633, Differentialekvationer I.
Kontrollskrivning nr 3, måndagen den 13 oktober 2008, kl 09.00-10.00.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3, \quad x > 0.$$

$y(x) = x$ är en lösning till motsvarande homogena differentialekvation.

………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:

Vi ansätter $y = xz$.

Denna ansats sätter vi in i den inhomogena differentialekvationen och erhåller då den allmänna lösningen.

$x^2\{xz'' + 2z'\} - 2x\{xz' + z\} + 2xz = x^3$, $z'' = 1$.

Integrera med avseende på x: $z' = x + A$.

Integrera med avseende på x: $z = \dfrac{x^2}{2} + Ax + B$.

Den allmänna lösningen blir $y = xz = x(\dfrac{x^2}{2} + Ax + B) = \dfrac{x^3}{2} + Ax^2 + Bx$.

Här kan allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning identifieras.

SVAR: Den allmänna lösningen är $y = \dfrac{x^3}{2} + Ax^2 + Bx$.

<u>Anm.</u> En annan variant är att sätta in $y = xz$ i den homogena differentialekvationen och erhålla den allmänna homogena lösningen.
Då återstår att bestämma en partikulärlösning vilken erhålles med variation av parametrar.

2. Bestäm en fundamentalmatris till systemet av differentialekvationer

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

Ange även den allmänna lösningen.

Vart tar en partikel placerad i punkten $(2,3)$ vägen efter lång tid ?

……………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:

Vi bestämmer först matrisens egenvärden och därefter motsvarande egenvektorer. Egenvärdena erhålles ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$.

Då erhålles följande: $0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$

Egenvärdena är: $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 2$.

Egenvektorerna fås ur ekvationen $\begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$

med aktuellt egenvärde insatt.

$\underline{\lambda_1 = 1}$ ger $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\underline{\lambda_2 = 2}$ ger $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Två linjärt oberoende lösningar är $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t$ och $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t}$.

En fundamentalmatris är $\begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{pmatrix}\mathbf{C}$ eller $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t}$.

Partikeln avlägsnar sig obegränsat från punkten.

SVAR: En fundamentalmatris är $\begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{pmatrix}\mathbf{C}$ eller $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t}$.

Partikeln avlägsnar sig obegränsat från punkten.

3. Bestäm och klassificera de kritiska punkterna till systemet

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -3x + y^2 + 2 \\ x - y^2 \end{pmatrix}.$$

……………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:

Vi bestämmer först de kritiska punkterna.

Där är hastighetsvektorn $\mathbf{X}'$ lika med nollvektorn.

Vi erhåller följande system: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x + y^2 + 2 \\ x - y^2 \end{pmatrix}$.

Addition av ekvationerna ger $x = 1$ vilket ger $y = \pm 1$.

Vi har de kritiska punkterna $(1,1)$ och $(1,-1)$.

Det icke-linjära systemet linjariseras med hjälp av Jacobianen i vilken de aktuella punkterna insättes. Matrisens egenvärden bestämmes.

Vi får Jacobianen $\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} -3 & 2y \\ 1 & -2y \end{pmatrix}$.

Punkten $(1,1)$ ger $\mathbf{J}(1,1) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Egenvärden fås ur ekvationen $0 = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = (\lambda+1)(\lambda+4)$.

Vi har erhållit egenvärdena $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = -4$.

De negativa egenvärdena innebär att vi har en stabil nod.

Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.

Punkten $(1,-1)$ ger $\mathbf{J}(1,-1) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Egenvärden fås ur ekvationen

$$0 = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 4 = (\lambda + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 4 = (\lambda + \frac{1}{2})^2 - \frac{17}{4}.$$

Vi har erhållit egenvärdena $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Egenvärdena har olika tecken.

Detta innebär att vi har en sadelpunkt vilken är instabil.

Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.

SVAR: $(1,1)$ är en stabil nod. $(1,-1)$ är en sadelpunkt vilken är instabil.