Kompletteringstentamen i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).
Måndagen den 9 februari 2009, kl 1815-1915.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Modul 1.

Bestäm den lösning till differentialekvationen $xy' - y + xy^2 = 0$ som uppfyller villkoret $y(2) = 2$.
Bestäm även lösningens existensintervall.

Lösning:

Den givna differentialekvationen är Bernoullsk.
Omformning av differentialekvationen ger: $xy^{-2}y' - y^{-1} + x = 0$.
Sätt: $z = y^{-1}$, $z' = -y^{-2}y'$. Vi får: $-xz' - z + x = 0$, $xz' + z = x$, $(xz)' = x$.
Vi har erhållit en linjär differentialekvation av första ordningen.
Integrera map x: $xz = \dfrac{x^2}{2} + C$. Med $z = y^{-1}$ erhålles $xy^{-1} = \dfrac{x^2}{2} + C$

Villkoret $y(2) = 2$ ger: $C = -1$. $xy^{-1} = \dfrac{x^2 - 2}{2}$, $y = \dfrac{2x}{x^2 - 2}$, där $x^2 - 2 \neq 0$.

Det maximala lösningsintervallet blir $\{x \ : \ x > \sqrt{2}\}$.

SVAR: Den sökta lösningen är $y = \dfrac{2x}{x^2 - 2}$ och det maximala lösningsintervallet $\{x \ : \ x > \sqrt{2}\}$.

Modul 2.

Bestäm $y(\frac{3\pi}{4})$ då $y'' + y = \delta(t - \frac{\pi}{2})$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ .där $\delta(t - \frac{\pi}{2})$ är Diracs deltafunktion.

Lösning:

Laplacetransformera: $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = e^{-s\frac{\pi}{2}}$

Insättning av villkoren och hyfsning ger: $Y(s)(s^2 + 1) = s + e^{-s\frac{\pi}{2}}$ Lös ut $Y(s)$: $Y(s) = \dfrac{s}{s^2 + 1} + \dfrac{1}{s^2 + 1} e^{-s\frac{\pi}{2}}$.

Återtransformera: $y(t) = \cos t + U(t - \frac{\pi}{2})\sin(t - \frac{\pi}{2})$.

$$y(\frac{3\pi}{4}) = \cos\frac{3\pi}{4} + U(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2})\sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\,\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

SVAR: Det sökta värdet är $y(\frac{3\pi}{4}) = 0$.

Modul 3.

Bestäm koefficienterna b_n , $n = 1,2,3,....$ så att $\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ då $0 < x < \pi$.

Lösning:

Vi utvecklar den udda funktionen som på intervallet $0 < x < \pi$ ges av $f(x) = \cos x$ i en sinusserie.
Koefficienterna $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x \sin nx dx = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\sin(n+1)x + \sin(n-1)x\right)dx$.

$$b_n = \{n \neq 1\} = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1 - \cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{1 - \cos(n-1)\pi}{n-1}\right)$$

$$b_n = \frac{1 - \cos(n+1)\pi}{\pi}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1 - \cos(n+1)\pi}{\pi}\,\frac{2n}{n^2 - 1}$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x dx = 0 .$$

För udda n är $b_n = 0$ och för jämna n är $b_n = \{n = 2m\} = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{8m}{4m^2 - 1}$.

SVAR: För udda n är $b_n = 0$ och för jämna n är $b_n = \{n = 2m\} = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{8m}{4m^2 - 1}$.

Modul 4.

Bestäm en fundamentalmatris till systemet av differentialekvationer $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - 2y \\ x \end{pmatrix}$.

Bestäm även vad som efter lång tid händer med en partikel placerad i punkten $(1,2)$ då partikelns rörelse ges av ovanstående system av differentialekvationer.

Lösning:

Vi omformar systemet $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Därefter bestämmer vi egenvärdena till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dessa erhålles ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = (\lambda+1)^2 + 1$.

Egenvärdena är $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$.

Komplexa egenvärden med negativ realdel innebär att partikeln kommer att gå mot origo efter lång tid.

För att bestämma en fundamentalmatris till systemet behövs två linjärt oberoende lösningar.
Vi bestämmer dessa med hjälp av ett egenvärde och tillhörande egenvektor till matrisen.
Det återstår att bestämma en egenvektor. Vi väljer först egenvärdet $\lambda_1 = -1 + i$.
En egenvektor, $\mathbf{K}$, bestämmes ur ekvationen $0 = (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{K}$

$$\begin{pmatrix} -2-(-1+i) & -2 \\ 1 & -(-1+i) \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}\ ,\ \begin{pmatrix} -1-i & -2 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}\ ,\ \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$$

Vi ser att raderna är proportionella. Egenvektorerna är $\mathbf{K} = r_1\begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix}$ där r_1 är ett godtyckligt reellt tal.

Vi väljer egenvektorn $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix}$.

En komplex lösning till systemet av differentialekvationer ges av $\mathbf{Z} = e^{(-1+i)t}\begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix}$.

Realdel och imaginärdel av den komplexa lösningen ger två linjärt oberoende lösningar till systemet av differentialekvationer. Först omformas den komplexa lösningen.

$$\mathbf{Z} = e^{(-1+i)t}\begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix} = e^{-t}(\cos t + i\sin t)\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathbf{X}_1 = \operatorname{Re}\mathbf{Z} = e^{-t}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\sin t\right\} = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_2 = \operatorname{Im}\mathbf{Z} = e^{-t}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\sin t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos t\right\} = e^{-t}\begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

En fundamentalmatris är $\Phi = \begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t + \sin t) & e^{-t}(\sin t - \cos t) \\ -e^{-t}\cos t & -e^{-t}\sin t \end{pmatrix}$.

SVAR: Partikeln kommer att gå mot origo efter lång tid.

En fundamentalmatris är $\Phi = \begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t + \sin t) & e^{-t}(\sin t - \cos t) \\ -e^{-t}\cos t & -e^{-t}\sin t \end{pmatrix}$.