Lösningsförslag till kontrollskrivning 1

1A. Finn den allmänna lösningen till diffekvationen $xy' - 7xe^{-x} = -(x+1)y$ på intervallet $x > 0$.

Lösning. Ekvationen kan skrivas som $xy' + (x+1)y = 7xe^{-x}$ så det är en linjär diffekvation av första ordningen. Eftersom $x > 0$ kan vi dela hela ekvationen med x för att få ekvationen på standardform. Vi får

$$y' + \frac{x+1}{x}y = 7e^{-x}.$$

Nu kan vi avläsa att $P(x) = (x+1)/x = 1 + 1/x$ och detta ger $\int P(x)dx = \int(1 + 1/x)dx = x + \ln x + C$. Vi kan välja $C = 0$ eftersom vi vill ha vilken primitiv funktion som helst. Integrerande faktorn ges av $I(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{x+\ln x} = xe^x$. Multiplicerar vi ekvationen med detta får vi

$$xe^x y' + (x+1)e^x y = 7x,$$

vilket kan skrivas som $(xe^x y)' = 7x$. Integrerar vi båda led får vi $xe^x y = 7x^2/2 + C$, varför $y(x) = (7x/2 + C/x)e^{-x}$.

Svar: $y(x) = (7x/2 + C/x)e^{-x}$

1B. Finn den allmänna lösningen till diffekvationen $x^2y' - e^x = (x-3)xy$ på intervallet $x > 0$.

Lösning. Ekvationen kan skrivas som $x^2y' - (x-3)xy = e^x$ så det är en linjär diffekvation av första ordningen. Eftersom $x > 0$ kan vi dela hela ekvationen med x^2 för att få ekvationen på standardform. Vi får

$$y' + \frac{3-x}{x}y = \frac{e^x}{x^2}.$$

Nu kan vi avläsa att $P(x) = (3-x)/x = 3/x - 1$ och detta ger $\int P(x)dx = \int(3/x - 1)dx = 3\ln x - x + C$. Vi kan välja $C = 0$ eftersom vi vill ha vilken primitiv funktion som helst. Integrerande faktorn ges av $I(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{3\ln x - x} = x^3e^{-x}$. Multiplicerar vi ekvationen med detta får vi

$$x^3e^{-x}y' + (3-x)x^2y = x,$$

vilket kan skrivas som $(x^3e^{-x}y)' = x$. Integrerar vi båda led får vi $x^3e^{-x}y = x^2/2 + C$, varför $y(x) = (1/(2x) + C/x^3)e^x$.

Svar: $y(x) = (1/(2x) + C/x^3)e^x$

2A. I ett okänt naturreservat bor en av de sista stammarna av kannibaler. Antalet nyfödda varje år är 5 % av det totala antalet kannibaler och varje år dör också 3 % av ålderdom. Då två kannibaler möts är det en enprocentig risk att en av kannibalerna äter upp den andra, men detta är också den enda dödsorsaken förutom ålderdom. Rädda för sina stambröder håller sig varje kannibal för sig själv, men de träffar ändå uppskattningsvis $K(t)/1000$ andra kannibaler varje år, där $K(t)$ är det totala antalet kannibaler i reservatet.

a) Ställ upp en diffekvation för antalet kannibaler $K(t)$. (2 p)

Lösning. Vi börjar med att bestämma antalet möten under ett år. Det finns $K(t)$ kannibaler och varje kannibal möter $K(t)/1000$ andra kannibaler, detta medför att antalet möten är $1/2K(t)K(t)/1000 = K(t)^2/2000$. Vi delar på 2 eftersom vi annars räknar varje möte två gånger, en för varje kannibal vid mötet. Förändringen i antalet kannibaler är $K'(t)$, men det är också lika med antalet födda kannibaler minus antalet döda kannibaler under året. Antalet födda kannibaler är $0,05K(t)$ och antalet döda på naturlig väg är $0,03K(t)$. Slutligen blir varje år $0,01K(t)^2/2000$ kannibaler uppätna. Detta ger diffekvationen $K'(t) = 0,05K(t) - 0,03K(t) - 0,01K(t)^2/2000 = 0,02K(t) - 5 \cdot 10^{-6}K(t)^2$.

Svar: $K'(t) = 0,02K(t) - 5 \cdot 10^{-6}K(t)^2$

b) Eftersom kannibalerna levt ostört under mycket lång tid kan vi uppskatta hur många de är. Ungefär hur många kannibaler finns det? Motivera ditt svar! (1 p)

Lösning. $K'(t) = 0,02K(t) - 5 \cdot 10^{-6}K(t)^2$ är en autonom diffekvation med en enda positiv kritisk punkt. Denna är stabil och därför kommer $K(t)$ alltid att närma sig den kritiska punkten, oavsett vad $K(t)$ är från början ($K(0)$ får naturligvis inte vara noll, för då kommer det aldrig bli några kannibaler), efter lång tid. Den positiva kritiska punkten ges av $0,02K - 5 \cdot 10^{-6}K^2 = K(0,02 - 5 \cdot 10^{-6}K) = 0$. Eftersom $K \neq 0$ gäller $0,02 - 5 \cdot 10^{-6}K$, dvs $K = 4000$.

Svar: Det finns ungefär 4000 kannibaler.

2B. I ett okänt naturreservat bor en av de sista stammarna av kannibaler. Antalet nyfödda varje år är 6 % av det totala antalet kannibaler och varje år dör också 2 % av ålderdom. Då två kannibaler möts är det en tvåprocentig risk att en av kannibalerna äter upp den andra, men detta är också den enda dödsorsaken förutom ålderdom. Rädda för sina stambröder håller sig varje kannibal för sig själv, men de träffar ändå uppskattningsvis $K(t)/500$ andra kannibaler varje år, där $K(t)$ är det totala antalet kannibaler i reservatet.

a) Ställ upp en diffekvation för antalet kannibaler $K(t)$. (2 p)

Lösning. Vi börjar med att bestämma antalet möten under ett år. Det finns $K(t)$ kannibaler och varje kannibal möter $K(t)/500$ andra kannibaler, detta medför att antalet möten är $1/2K(t)K(t)/500 = K(t)^2/1000$. Vi delar på 2 eftersom vi annars räknar varje möte två gånger, en för varje kannibal vid mötet. Förändringen i antalet kannibaler är $K'(t)$, men det är också lika med antalet födda kannibaler minus antalet döda kannibaler under året. Antalet födda kannibaler är $0,06K(t)$ och antalet döda på naturlig väg är $0,02K(t)$. Slutligen blir varje år $0,02K(t)^2/1000$ kannibaler uppätna. Detta ger diffekvationen $K'(t) = 0,06K(t) - 0,02K(t) - 0,02K(t)^2/1000 = 0,04K(t) - 2 \cdot 10^{-5}K(t)^2$.

Svar: $K'(t) = 0,04K(t) - 2 \cdot 10^{-5}K(t)^2$

b) Eftersom kannibalerna levt ostört under mycket lång tid kan vi uppskatta hur många de är. Ungefär hur många kannibaler finns det? Motivera ditt svar! (1 p)

Lösning. $K'(t) = 0,04K(t) - 2 \cdot 10^{-5}K(t)^2$ är en autonom diffekvation med en enda positiv kritisk punkt. Denna är stabil och därför kommer $K(t)$ alltid att närma sig den kritiska punkten, oavsett vad $K(t)$ är från början ($K(0)$ får naturligvis inte vara noll, för då kommer det aldrig bli några kannibaler), efter lång tid. Den positiva kritiska punkten ges av $0,04K - 2 \cdot 10^{-5}K^2 = K(0,04 - 2 \cdot 10^{-5}K) = 0$. Eftersom $K \neq 0$ gäller $0,04 - 2 \cdot 10^{-5}K$, dvs $K = 2000$.

Svar: Det finns ungefär 2000 kannibaler.

3A. Finn ett $y(x)$ sådant att $y' = x^2 + 2xy + y^2$ och som dessutom uppfyller att $y(1) = -1$.

Ledning: Gör en lämplig substitution.

Lösning. Skriv ekvationen som $y' = (x+y)^2$. Vi ser att högerledet kan uttryckas som en funktion av $x + y$ och gör därför substitutionen $u(x) = x + y(x)$. Vi börjar med att bestämma begynnelsevillkoret för u, det får vi genom att stoppa in $x = 1$. Detta ger $u(1) = 1 + y(1) = 1 - 1 = 0$. Då vi deriverar u med avseende på x får vi $u'(x) = 1 + y'(x)$ så diffekvationen kan skrivas som $u' - 1 = u^2$. Detta är en autonom diffekvation, vi skriver derivatan $u' = du/dx$ och får

$$\frac{du}{dx} = 1 + u^2,$$

vilket ger

$$\int \frac{du}{1 + u^2} = \int dx.$$

Alltså är $\arctan u = x + C$, dvs $u(x) = \tan(x + C)$. Eftersom vi vet att $u(1) = 0$ får vi $u(1) = \tan(1 + C) = 0$, och detta gäller för $C = -1$. Vi minns nu att $u(x) = x + y(x)$, dvs $y(x) = u(x) - x$, så vi får $y(x) = \tan(x - 1) - x$.

Svar: $y(x) = \tan(x - 1) - x$

3B. Finn ett $y(x)$ sådant att $xyy' = x^2 + y^2$ och som dessutom uppfyller att $y(1) = 1$.

Ledning: Gör en lämplig substitution.

Lösning. Ekvationen $xyy' = x^2 + y^2$ är homogen, vi gör därför substitutionen $y(x) = u(x)x$. Vi börjar med att bestämma begynnelsevillkoret för u, det får vi genom att stoppa in $x = 1$. Detta ger $1 = y(1) = u(1)1 = u(1)$. Då vi deriverar y med avseende på x får vi $y'(x) = u'(x)x + u(x)1 = u'(x)x + u(x)$ så diffekvationen kan skrivas som $xu(x)x(u'(x)x + u(x)) = x^2 + (u(x)x)^2$. Detta förenklas till

$$u(x)u'(x)x = 1.$$

Detta är en separabel diffekvation, vi skriver derivatan $u' = du/dx$ och får

$$ux\frac{du}{dx} = 1,$$

vilket ger

$$\int u du = \int \frac{dx}{x}.$$

Alltså är $u^2/2 = \ln|x| + C$, dvs $u(x) = \pm\sqrt{2\ln|x| + 2C}$. Eftersom vi vet att $u(1) = 1$ får vi $u(1) = \pm\sqrt{2\ln|1| + 2C} = \pm\sqrt{2C}$ och detta gäller om vi väljer plustecknet och sätter $C = 1/2$. Vi minns nu att $y(x) = u(x)x$ så vi får $y(x) = x\sqrt{2\ln|x| + 1}$.

Svar: $y(x) = x\sqrt{2\ln|x| + 1}$