Föreläsning 10

Sats: Antag att f är kontinuerligt deriverbar förutom i ett ändligt antal punkter där den gör ändliga hopp och dessutom att $\lim_{x \to -p} f(x)$ och $\lim_{x \to p} f(x)$ existerar. Då har f en fourierserie som är konvergent för varje $x \in (-p, p)$ och dess värde är $f(x)$ i de punkter x där f är kontinuerlig. I de punkter där f hoppar är fourierseriens värde medelvärdet av västergränsvärdet och högergränsvärdet för funktionen, fourierseriens värde är

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Observation 1: Om f är en jämn funktion, dvs om $f(-x) = f(x)$, på $(-p, p)$ kan dess fourierserie förenklas till

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{p} x$$

$$\text{där} \qquad \begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{p} \int_0^p f(x)dx \\ a_n &= \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx. \end{aligned}$$

Observation 2: Om f är en udda funktion, dvs om $f(-x) = -f(x)$, på $(-p, p)$ kan dess fourierserie förenklas till

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{p} x$$

$$\text{där} \qquad b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x dx.$$

En funktion som bara är definierad på intervallet $(0, p)$ kan utvidgas till både en jämn respektive en udda funktion på intervallet $(-p, p)$. Därför har en sådan funktion både en cosinus- och en sinus-serie, och de är givna av formlerna ovan.

Separation av variabler

Då man ska lösa en homogen partiell diffekvation ska man börja med att söka efter produktlösningar, dvs lösningar på formen $u(x,y) = X(x)Y(y)$. För att göra detta ska man stoppa in ansatsen i ekvationen och sedan separera variablerna, dvs flytta alla x till vänsterledet och alla y till högerledet.

Vänsterledet är nu inte beroende av y, men det är lika med högerledet, som inte är beroende av x. Alltså måste vänsterled och högerled vara oberoende av både x och y, dvs konstanta.