Föreläsning 11

Om man har en linjär homogen ekvation med homogena randvillkor och vet att $u_1, u_2, ..., u_n$, är lösningar, då vet man att även linjärkombinationer av dessa är lösningar, dvs $C_1u_1 + C_2u_2 + ... + C_nu_n$ är lösningar.

Alltså kan man på detta sätt hitta massor med lösningar från några få.

Förra föreläsningen visade jag hur man hittade produktlösningar genom separation av variabler, så vi vet hur man hitta några lösningar, och därmed hur man hittar många lösningar till en linjär homogen PDE.

Hur man löser en homogen PDE

1. Leta efter produktlösningar, dvs lösningar på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$ med hjälp av variabelseparation. Bestäm speciellt de produktlösningar som uppfyller randvillkoren.

2. Bilda en linjärkombination av alla produktlösningar som uppfyller randvillkoren och stoppa in detta i begynnelsevillkoret.

3. Bestäm koefficienterna i linjärkombinationen m.h.a. fourierserie-utveckling av begynnelsevillkoret.

Värmeledningsekvationen

Temperaturen $u(x,t)$ i en stång som är utlagd från $x = 0$ till $x = L$ uppfyller approximativt värmeledningsekvationen:

Ekvation	$k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad k > 0$
Variabelvärden	$0 \le x \le L$ och $t \ge 0$
Begynnelsevillkor	$u(x,0) = f(x)$

Randvillkor och lösningar

1) Villkoret $u(0,t) = 0$ och $u(L,t) = 0$ säger att båda ändar kyls (eller värms) till 0 hela tiden.

Med detta villkor ges lösningen $u(x,t)$ av

$$\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx\right)e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}\sin\frac{n\pi}{L}x.$$

2) Villkoret $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$ och $\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$ säger att båda ändar är isolerade.

Med detta villkor ges lösningen $u(x,t)$ av

$$\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx+$$

$$+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\right)e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}\cos\frac{n\pi}{L}x.$$