Föreläsning 14

Vi studerade linjära ekvationer, dvs ekvationer på formen

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x). \quad (1)$$

Det finns inga generella lösningsmetoder för $n > 1$, däremot kan man komma någonstans så fort man hittar någon lösning till den homogena ekvationen.

Reduktion av ordning

Givet: Vi känner till en homogen lösning y_1 till (1).

Ansats: $y(x) = y_1(x)u(x)$

Vi får: En linjär diffekvation av ordning $n - 1$ i funktionen $u'(x)$.

Om ekvationen från början hade ordning 2, får vi nu en ekvation av ordning 1 och sådana kan man lösa m.h.a. integrerande faktor.

Om ekvationen $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ har en lösning $y_1(x)$ ges en annan (linjärt oberoende) lösning av

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{(y_1(x))^2}dx.$$

Variation av parametrar

Givet: Vi känner till alla homogena lösningar $y_1, y_2, ..., y_n$ till (1).

Ansats: För $n = 2$ ser ansatsen ut som $y_p = y_1(x)u_1(x) + y_2(x)u_2(x)$ med bivillkoret att $0 = y_1(x)u_1'(x) + y_2(x)u_2'(x)$.

Vi får: y_p och därmed vet vi allt!