Föreläsning 15

Vi ska lära oss lösa linjära första ordningens system av diffekvationer med konstanta koefficienter, dvs

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases}$$

Om inga $f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)$ finns i systemet kallas det homogent. I mer kompakt notation skriver vi

$$X' = AX + f(t). \tag{1}$$

Ekvationen

$$a_n(t)\frac{d^ny}{dt^n} + ... + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = f(t)$$

kan skrivas om till ett system genom substitutionen $y(t) = x_1(t), y'(t) = x_2(t), ..., y^{(n-1)}(t) = x_n(t)$.

Existens- och entydighets-sats
Systemet (1) med begynnelsevärdet $X(t_0) = X_0$ har en entydig lösning.

Följd
Det homogena systemet till (1) har n linjärt oberoende lösningar. Eftersom ekvationerna är linjära och homogena bildar lösningarna ett vektorum, dvs linjärkombinationer av lösningar är nya lösningar.

Allmän lösning
Allmän lösning till (1) ges av $X = X_h + X_p$ där X_h är allmänna lösningen till det homogena problemet och X_p är en lösning till (1).

Lösningar
Låt A ha en egenvektor v med egenvärde λ. Då är $X(t) = ve^{\lambda t}$ en lösning till $X' = AX$.