Föreläsning 16

Sist visade vi följande sats:

Lösningar

Låt A ha en egenvektor v med egenvärde λ. Då är $X(t) = ve^{\lambda t}$ en lösning till $X' = AX$.

Detta ger oss allmänna lösningen till det homogena systemet i det fall då A är reellt diagonaliserbar, men annars måste vi hitta på något lite nytt. Två saker kan gå fel; A kan ha komplexa egenvärden resp. A kan ha upprepade egenvärden.

Komplexa egenvärden

Om matrisen A har egenvärdena $\lambda = \alpha \pm i\beta$ och $\lambda = \alpha + i\beta$ har en egenvektor v så är två oberoende lösningar till $X' = AX$

$$X_1(t) = (\text{Re}(v)\cos\beta t - \text{Im}(v)\sin\beta t)\, e^{\alpha t}$$

och

$$X_2(t) = (\text{Re}(v)\sin\beta t + \text{Im}(v)\cos\beta t)\, e^{\alpha t}.$$

Upprepade egenvärden

Låt A ha ett upprepat egenvärde λ med egenvektor v. Om w uppfyller att $Aw = \lambda w + v$ då är

$$X(t) = (v \cdot t + w)\, e^{\lambda t}$$

en lösning till systemet $X' = AX$.

Fundamentalmatris

En matris $\Phi(t)$ där varje kolumn är en lösning till det homogena systemet och där kolumnerna är linjärt oberoende kallas en fundamentalmatris.

$$\Phi'(t) = A\Phi(t)$$

Allmän lösning

Om man känner till $\Phi(t)$ (dvs allmänna homogena lösningen till systemet) kan lösningen till det inhomogena systemet beräknas genom ansatsen $X_p = \Phi(t)U(t)$. Detta kallas (också) variation av parametrar.