Föreläsning 17

Fundamentalmatris

En matris $\Phi(t)$ där varje kolumn är en lösning till det homogena systemet och där kolumnerna är linjärt oberoende kallas en fundamentalmatris.

$$\Phi'(t) = A\Phi(t)$$

Allmän lösning

Om man känner till $\Phi(t)$ (dvs allmänna homogena lösningen till systemet) kan lösningen till det inhomogena systemet beräknas genom ansatsen $X(t) = \Phi(t)U(t)$. Detta kallas (också) variation av parametrar. Lösningen till $X' = AX + F(t)$ blir

$$X(t) = \Phi(t)C + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)F(t)dt$$

där C är en godtycklig konstantvektor.

Autonoma system

Ett autonomt system är ett system på formen

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad . \\ x_n' = f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}$$

Med andra ord är det ett system som inte innehåller några t i ekvationerna.

Man kan inte lösa sådana system, men man kan förstå lösningarnas beteende genom att göra kvalitativ analys av systemet. För oss betyder detta att vi hittar alla kritiska punkter och reder ut deras stabilitet.

Kritisk punkt

En punkt $x_1, x_2, ..., x_n$ sådan att

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad . \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

kallas en kritisk punkt.

Stabilitet

Om lösningar vill mot den kritiska punkten kallas de stabila, om lösningarna vill bort kallas de instabila.

För att avgöra vilken typ av kritisk punkt man har måste man linearisera sitt system kring den kritiska punkten. Matrisen i det lineariserade systemet blir Jacobianen av f, dvs

$$J(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

beräknad i den kritiska punkten.

Om något egenvärde till denna matris har positiv realdel är punkten instabil, men om alla egenvärden har negativ realdel är punkten stabil.

Rörelse i planet

Då vi har $n = 2$ har man dessutom följande uppdelning av de kritiska punkterna:

Om $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ kallas punkten instabil nod.

Om $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ kallas punkten stabil nod.

Om $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ kallas punkten sadelpunkt (instabil).

Om $\lambda = \alpha \pm i\beta$ och $\alpha > 0$ kallas punkten instabil spiralpunkt.

Om $\lambda = \alpha \pm i\beta$ och $\alpha < 0$ kallas punkten stabil spiralpunkt.