Föreläsning 9

Partiella diffekvationer

Linjära homogena partiella diffekvationer med homogena randvillkor löses med hjälp av en metod där man först hittar alla produktlösningar till ekvationen, sen anpassar koefficienter till begynnelsevillkoren. Det senare steget kräver viss insikt i fourieranalys.

Fourieranalys

Förenklat är detta linjär algebra på funktionsrum. Idén är att istället för att studera den krångliga funktionen f dela upp den som en summa av enkla funktioner. För att man ska kunna dela upp funktionen på ett lätt sätt krävs att de enkla funktionerna är ortogonala.

Skalärprodukter

Skalärprodukten på intervallet I definieras av

$$(f, g) = \int_I f(t)g(t)dt.$$

Om $(f, g) = 0$ sägs f och g vara ortogonala.

Funktionerna $1/2, \cos \pi t/p, \cos 2\pi t/p, \cos 3\pi t/p, ...,$ $\sin \pi t/p, \sin 2\pi t/p, \sin 3\pi t/p, ...$ är alla ortogonala mot varandra.

Fourierserier

Låt f vara en funktion definierad på intervallet $(-p, p)$. Dess fourierserie är

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{p} t + b_n \sin \frac{n\pi}{p} t \right)$$

där

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(t)dt \\ a_n &= \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(t) \cos \frac{n\pi}{p} t dt \\ b_n &= \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(t) \sin \frac{n\pi}{p} t dt. \end{aligned}$$