Lösningsföslag till tentamen i Diff & trans III, 2009-06-09

1. Vi har en autonom ekvation. De kritiska punkterna ges av ekvationen $x \cos x = 0$ som har lösningarna $x = 0$ och $x = \pi/2 + n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Begynnelsevillkoret $x(0) = 2$ ligger i intervallet $(\pi/2, \pi)$. I detta intervallet är $x \cos x < 0$, dvs x' är negativ. Alltså följer att $x(t) \to \pi/2$ då $t \to \infty$. (Se diskusionen på sid. 38-39 i Zill-Cullen).

2. Låt $u(x) = y'(x)$. Då fås den linjära ekvationen av första ordningen

$$xu' + 4u = x.$$

Den integrerande faktorn är x^4, och lösningen är $u(x) = C/x^4 + x/5$. Genom att integrera u får vi att

$$y(x) = \frac{A}{x^3} + B + \frac{x^2}{10}$$

där A och B är konstanter.

3. a) Se definition 10.3.1 (sid. 379) i Zill-Cullen.

b) Vi måste hitta alla lösningarna till det icke-linjära systemet

$$\begin{cases} y - x^2 + 2 = 0 \\ x^2 - xy = 0 \end{cases}$$

Den andra ekvationen, som kan skrivas $x(x - y) = 0$, ger att vi måste ha $x = 0$ eller $x = y$.

Sätter vi in $x = 0$ i den första ekvationen fås $y + 2 = 0$, dvs $y = -2$. Alltså är $x = 0, y = -2$ en lösning till systemet.

Sätter vi in $x = y$ i den första ekvationen fås $x - x^2 + 2 = 0$, vilket ger $x = 2$ eller $x = -1$. Således är $x = 2, y = 2$ och $x = -1, y = -1$ lösningar.

Vi har alltså hittat de kritiska punkterna. De är

$$(0, -2), (2, 2), (-1, -1).$$

c) Vi undersöker den kristiska punkten $(0, 2)$. Jacobi-matrisen för systemet är

$$\begin{pmatrix} -2x & 1 \\ 2x - y & -x \end{pmatrix}$$

och i punkten $(0, -2)$ är den

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena till denna matris är $\pm\sqrt{2}$, så den kritiska punkten $(0,-2)$ är en sadelpunkt, dvs den är instabil.

4. Vi söker en lösning på formen $u(x,y)=X(x)Y(y)$. Insättning ger $X''Y+XY''=0$ vilket ger

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=\lambda.$$

Separationskonstanten λ är oberoende av x och y. Detta ger oss de två ekvationerna

$$X''-\lambda X=0, \quad Y''+\lambda Y=0.$$

Eftersom vi vill ha $u(x,0)=e^{4x}$, tittar vi på fallet då $\lambda=4^2=16$. Vi har då

$$X''-16X=0, \quad Y''+16Y=0.$$

Detta ger $X(x)=c_1e^{4x}+c_2e^{-4x}$ (den K.E. är $r^2-16=0$) och $Y(y)=c_3\cos 4y+c_4\sin 4y$ (den K.E. är $r^2+16=0$). Väljer vi $c_1=1, c_2=0, c_3=1, c_4=0$ får vi en lösning

$$u(x,y)=X(x)Y(y)=e^{4x}\cos 4y$$

som uppfyller $u(x,0)=e^{4x}$.

5. Ekvationen kan skrivas på formen

$$X'=AX+\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$$

där

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}X \quad \text{och} \quad X(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}.$$

Vi löser först den homogena ekvatioen $X'=AX$. Matrisen A har egenvärdena $\lambda_1=3$ och $\lambda_2=-1$. Motsvarande egenvektorer är

$$K_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{och} \quad K_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

Allstå är den allmänna lösningen till den homogena ekvationen

$$X_h=c_1K_1e^{3t}+c_2K_2e^{-t}$$

där c_1, c_2 är godtyckliga konstanter.

Det är lätt att se att den konstanta lösningen

$$X_p=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$$

är en partikulärlösning (använd t ex metoden med obestämda koefficienter). Således är den allmänna lösningen till den ursprungliga ekvationen

$$X = X_h + X_p = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Begynnelsevillkoret $X(0) = \binom{2}{1}$ ger ekvationen

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = X(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

vilket ger $c_1 = 1$ och $c_2 = 3$. Alltså är lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

6. Vi löser först den homogena ekvationen

$$x^2 y'' - xy' + y = 0.$$

Man ser lätt att $y_1 = x$ är en lösning till denna ekvation. För att hitta en lösning till använder vi metoden "reduktion av ordning". Vi får då att $y_2 = x \ln x$ också är en lösning. Det är klart att y_1 och y_2 är linjärt oberoende. Således är den allmänna lösningen till den homgoena ekvationen

$$y_h(x) = c_1 x + c_2 x \ln x$$

där c_1 och c_2 är godtyckliga konstanter.

Vi ser att $y_p = 3$ är en partikulärlösning till den ursprungliga ekvatioen. Alltså är

$$y = y_h + y_p = c_1 x + c_2 x \ln x + 3$$

den allmänna lösningen till den givna ekvationen.

Vi använder nu begynnelsevillkoren för att bestämma konstanterna c_1 och c_2.

$$\begin{aligned} 0 &= y(1) = c_1 + 3 \\ 1 &= y'(1) = c_1 + c_2 \end{aligned}$$

vilket ger $c_1 = -3$ och $c_2 = 4$. Således är lösningen till problemet

$$y(x) = -3x + 4x \ln x + 3.$$

7. Det här är uppgift 12.3.1 i Zill-Cullen med $L = \pi$ och $k = 1$. Genom att göra precis som i boken (sid. 444) fås lösningen

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \cos(n\pi/2)}{n} \right) e^{-n^2 t} \sin nx.$$

8. a) På sid. 23-24 i Zill-Cullen (Draining a tank) härleds ekvationen för $h(t)$:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{D}{A(h)}\sqrt{2gh}.$$

b) Här är $A(h) = 1$ och $D = 10^{-4}$ (mätt i m^2), och initialt har vi $h(0) = 1$ (m). Vi ska alltså lösa begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dh}{dt} = -10^{-4}\sqrt{2gh}, \quad h(0) = 1.$$

Om vi kallar konstanten $-10^{-4}\sqrt{2g}$ för K, ska vi alltså lösa ekvationen $h'(t) = K\sqrt{h}$. Detta är en separabel ekvation, och har lösningen

$$\sqrt{h(t)} = \frac{K}{2}t + C$$

där C är en konstant. Begynnelsevillkoret $h(0) = 1$ ger $C = 1$. Detta ger nu att (h måste vara positiv)

$$h(t) = \left(\frac{K}{2}t + 1\right)^2.$$

Vi ser att $h(t) = 0$ precis då

$$t = -\frac{2}{K} = \frac{2 \cdot 10^4}{\sqrt{2g}} \approx 4500\ s.$$

9. Vi skriver ekvationen som ett system av första ordningens ekvationer genom att införa $y = x'$. Vi får det autonoma systemet (tänk på att $y' = x''$)

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -y - x - x^2 \end{cases}$$

Vi vill undersöka om den kritiska punkten $(0, 0)$ är asymptotiskt stabil. Jacobi-matrisen i $(0, 0)$ är

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

som har egenvärdena $-1/2 \pm i\sqrt{3}/2$. Eftersom realdelen är < 0 följer att $(0, 0)$ är en asymptotiskt stabil kritisk punkt. Detta betyder att om $x(0)$ och $y(0)$ är nära 0, så $x(t) \to 0$ (och $x'(t) = y(t) \to 0$) då $t \to \infty$.