KTH Matematik

Tentamen i Diff & trans III, SF1637, den 9 juni 2009

Inga hjälpmedel tillåtna. Uppgifterna 1 – 6 ger vardera maximalt 3 poäng; uppgifterna 7 – 9 ger vardera maximalt 4 poäng. För betyg E (godkänt), D, C, B, A krävs minst 15, 18, 21, 24 repektive 27 poäng.

Om 13 eller 14 poäng uppnås finns möjlighet att **komplettera den 18 juni klockan 10:00** . Kontakta i så fall kursledaren.

Den som är godkänd på lappskrivning nummer i har automatiskt full poäng på uppgift nummer i.

1. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dx}{dt} = x\cos x, \quad x(0) = 2.$$

Vad händer med $x(t)$ när t går mot oändligheten?

2. Bestäm den allmänna lösningen $y = y(x)$ till ekvationen

$$xy'' + 4y' = x$$

på intervallet $(0, \infty)$.

3. a) Beskriv vad som menas med att en kritisk punkt till ett plant autonomt system är stabil.

b) Hitta de kritiska punkterna till systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^2 + 2 \\ \frac{dy}{dt} = x^2 - xy \end{cases}$$

c) Välj en av de kritiska punkterna och avgör om den är stabil eller instabil.

4. Hitta en lösning till randvärdesproblemet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(x, 0) = e^{4x}.$$

5. Hitta den lösningen till systemet

$$\frac{dx}{dt} = x(t) + 2y(t) + 2$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x(t) + y(t) - 5$$

som uppfyller begynnelsevillkoret $x(0) = 2, \; y(0) = 1$.

Vänd!

6. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$x^2y'' - xy' + y = 3, \quad y(1) = 0,\ y'(1) = 1.$$

7. Lös randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0, &\quad u(\pi,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x < \pi \end{cases} \end{aligned}$$

8. a) Enligt Torricellis lag kommer vatten i en öppen tank (inget lock) att strömma ut ur ett litet hål i botten med samma fart som en vattendroppe skulle ha om den föll fritt från vattennivån i tanken till hålet (inget luftmotstånd). Om $A(h)$ betecknar tvärsnittsarean på tanken vid höjden $h > 0$ ($h = 0$ motsvarar botten på tanken) och D betecknar hålets tvärsnittsarea, bestäm en differentialekvation som ger vattennivån $h(t)$ vid tiden t (som vi alla vet kommer $h(t)$ minska med tiden). (Ledning: enligt energiprincipen kommer en droppe som börjar i vila och faller fritt från höjden h till höjden 0 att ha farten $v = \sqrt{2gh}$ när den kommer ner; fås ur $mgh = mv^2/2$.)

b) Antag att en cylindrisk tunna har tvärsnittsarean $A = 1\ \text{m}^2$, har ett hål i botten med tvärsnittsarean 1cm^2, och är fylld med vatten upp till höjden 1 meter (mätt från tunnans botten). Hur lång tid tar det innan allt vatten i tunnan har runnit ut?

9. Betrakta den icke-linjära differentialekvationen

$$x''(t) + x'(t) + x(t) + (x(t))^2 = 0.$$

Vi ser att den konstanta lösningen $x(t) = 0$ uppfyller begynnelsevillkoret $x(0) = 0, x'(0) = 0$. Vad händer med en lösning $x(t)$ då $t \to \infty$ om $|x(0)|$ och $|x'(0)|$ är väldigt nära 0?

Lycka till!