

Extra uppgifter. Tal och funktioner, SF1643 för I, HT2008.

Induktion.

I1. Visa att $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n = \frac{n^3-n}{3}$, $n = 2, 3, 4, \dots$

I2. Visa att $3^n \geq n \cdot 2^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$

I3. Visa att $5^n - 1$ är jämnt delbart med 4 för $n = 1, 2, 3, \dots$

I4. Visa att

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

[Kom ihåg att $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ för $n = 1, 2, 3, \dots$]

Potenser och logaritmer.

H1. Ett radioaktivt ämne har halveringstiden 7200 år. Efter hur lång tid är koncentrationen nere i 1% av den ursprungliga?

Svar: $14400 \frac{\ln 10}{\ln 2}$, c:a 47836 år.

H2. En bakteriepopulation antas tillväxa exponentiellt. Efter 2 timmar är bakteriemassan 5 gånger så stor som i början. Hur stor är fördubblingstiden?

Svar: $\ln 4 / \ln 5$, c:a 0.86 tim.

H3. Hur stor är halveringstiden för den radioaktiva isotop vars massa minskat till 10% av den ursprungliga efter 100 år?

Svar: $100 \frac{\ln 2}{\ln 10} = 100 \lg 2 = 30.1 \dots$ år.

H4. Lös ekvationen $e^{2x} = 3 \cdot 10^x$.

Svar: $-\ln 3 / (\ln 10 - 2)$.