**Lösningsförslag till tentamen i Tal och funktioner, SF1643, den 30 sept. 2008.**

**1. a)**

$$\sqrt[3]{\frac{9^{5/2}}{\sqrt{3}}} = \frac{(3^5)^{1/3}}{(3^{1/2})^{1/3}} = \frac{3^{5/3}}{3^{1/6}} = 3^{5/3-1/6} = 3^{3/2} = 3\sqrt{3}.$$

**b)**

$$\frac{1}{2}\ln 100 - 2\ln 2 = \ln(100^{1/2}) - \ln(2^2) = \ln 10 - \ln 4 = \ln\frac{10}{4} = \ln\frac{5}{2}.$$

**c)**

$$\frac{2+3i}{5+i} = \frac{(2+3i)(5-i)}{(5+i)(5-i)} = \frac{13+13i}{26} = \frac{1+i}{2}.$$

**2. a)** Vi antar att $x \neq -2$ och $x \neq 0$ (för dessa värden på $x$ är det ursprungliga uttrycket odefinierat). Då har vi

$$\frac{x}{x+2} + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + (x+2)}{x(x+2)} = 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 = x(x+2)$$
$$\Leftrightarrow x = 2.$$

Detta ger att $x = 2$ är den unika lösningen till ekvationen.

**b)**

$$x - \sqrt{x+1} = 1 \Rightarrow x - 1 = \sqrt{x+1} \Rightarrow (x-1)^2 = x+1$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ eller } x = 3.$$

Detta betyder att de enda tänkbara lösningarna är $x = 0$ och $x = 3$. Insättning i den ursprungliga ekvationen ger att endast $x = 3$ är en lösning.

**c)** Om $\cos 10x = 1/\sqrt{2}$ måste vi ha att $10x = \pi/4 + k2\pi$ eller $10x = -\pi/4 + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Detta betyder att lösningarna är

$$x = \pm\frac{\pi}{40} + k\frac{\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**3.** Vi har

$$\frac{2x^2-3}{x+2} \geq x \Leftrightarrow \frac{2x^2-3}{x+2} - x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 3 - x(x+2)}{x+2} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+1)}{x+2} \geq 0.$$

Vi gör en teckentabell för att analysera det sista uttrycket.

| $x$ | | -2 | | | -1 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-3$ | - | | - | | | - | 0 | + |
| $x+1$ | - | | - | 0 | | + | | + |
| $x+2$ | - | 0 | + | | | + | | + |
| $\frac{(x-3)(x+1)}{x+2}$ | - | ej def. | + | 0 | | - | 0 | + |

Således, olikheten är uppfylld för $-2 < x \leq -1$ och $x \geq 3$.

**4.** Enligt binomialsatsen har vi

$$\left(x + \frac{1}{2x^2}\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} x^k \left(\frac{1}{2x^2}\right)^{15-k}.$$

För att få en $x^9$ term måste $k$ uppfylla $k - 2(15-k) = 9$, dvs $k = 13$. För $k = 13$ har vi

$$\binom{15}{13} x^{13} \left(\frac{1}{2x^2}\right)^2 = \binom{15}{13} \frac{1}{2^2} x^9 = \frac{15!}{2!13!} \frac{1}{4} x^9 = \frac{15 \cdot 14}{8} x^9 = \frac{105}{4} x^9$$

Alltså, $105/4$ är koefficienten framför $x^9$ termen.

**5.** Lös ekvationen $2\cos 2x + 4\cos x = -3$.

Vi har formeln $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, vilket gör att ekvationen kan skrivas

$$4\cos^2 x - 2 + 4\cos x = -3 \Leftrightarrow \cos^2 x + \cos x + \frac{1}{4} = 0.$$

Om vi sätter $y = \cos x$, kan den sista ekvationen skrivas $y^2 + y + 1/4 = 0$, vilket ger $y = -1/2$ (en dubbelrot). Således är den ursprungliga ekvationen ekvivalent med

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

vilket ger $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

**6.** Koncentrationen ges av

$$C(t) = C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$$

där $C_0$ är koncentrationen vid tid $t = 0$ och där $h$ är halveringstiden.

De givna data ger

$$C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{120}{h}} = \frac{C_0}{20} \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{120}{h}} = \frac{1}{20}.$$

Vi tar naturliga logaritmen av båda sidorna i det sista uttrycket och får

$$\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{120}{h}}\right) = \ln\left(\frac{1}{20}\right) \iff \frac{120}{h}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 20$$

$$\iff -\frac{120}{h}\ln 2 = -\ln 20 \iff h = \frac{120\ln 2}{\ln 20}\ \text{år.}$$

**7.** Det givna polynomet har reella koefficienter vilket medför att också $z = 2 - i$ måste vara en rot. Alltså måste polynomet innehålla faktorn $(z - (2+i))(z-(2-i)) = z^2 - 4z + 5$. Polynomdivision ger att

$$z^4 - 4z^3 + 2z^2 + 12z - 15 = (z^2 - 4z + 5)(z^2 - 3).$$

Eftersom $z^2 - 3 = 0$ har lösningarna $z = \pm\sqrt{3}$, vet vi alltså att rötterna till det ursprungliga polynomet är

$$z = 2 \pm i \quad \text{och} \quad z = \pm\sqrt{3}.$$

**8.** Låt $P(n)$ vara påståendet att

$$\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2.$$

<u>Basfall</u>: För $n = 1$ har vi att vänsterledet är $2\cdot 1 - 1 = 1$ och högerledet är $1^2 = 1$, dvs $P(1)$ är sant.
<u>Induktionssteget</u>: Vi vill nu visa att för varje $k \geq 1$ gäller att $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, dvs om $P(k)$ gäller, så gäller också $P(k+1)$.

Antag att $P(k)$ gäller för något $k \geq 1$, dvs antag att

$$\sum_{j=1}^{k}(2j-1) = k^2.$$

Då har vi

$$\sum_{j=1}^{k+1}(2j-1) = \left(\sum_{j=1}^{k}(2j-1)\right) + (2(k+1)-1) = [\text{ind. ant.}] =$$

$$= k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$$

dvs $P(k+1)$ gäller. Således har vi visat att $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Enligt induktionsprincipen följer nu att $P(n)$ är sant för alla $n \geq 1$.