KTH Matematik

Tentamen i Tal och funktioner, SF1643, för Bio och K den 2 oktober 2007.

Inga hjälpmedel tillåtna.
För betyg E (godkänt), D, C, B, A krävs minst 12, 15, 18, 20 respektive 22 poäng inklusive bonuspoäng.
Om 10 - 11p uppnås finns möjlighet att komplettera inom fyra veckor. Kontakta i så fall kursledaren.

1a. $\sqrt[3]{\dfrac{4}{\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = (2^{3/2})^{1/3} = 2^{1/2} = \sqrt{2}.$

1b. $\dfrac{1+3i}{3+4i} = \dfrac{(1+3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \dfrac{3+12+9i-4i}{9+16} = \dfrac{15+5i}{25} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{i}{5}.$

1c. $\binom{10}{5} \Big/ \binom{10}{6} = \dfrac{10!}{5!\cdot 5!} \Big/ \dfrac{10!}{6!\cdot 4!} = \dfrac{10!}{5!\cdot 5!} \cdot \dfrac{6!\cdot 4!}{10!} = \dfrac{6!}{5!} \cdot \dfrac{4!}{5!} = \dfrac{6}{5}$

2. Lös ekvationen $\sin 2x = \sin 3x$.
Man får direkt de två fallen:
$2x = 3x + 2n\pi$
och
$2x = \pi - 3x + 2n\pi$
vilket ger rötterna
$x = 2n\pi$ och $x = \pi/5 + 2n\pi/5, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

3a. $e^{2x} = 2e^x$
$2x = \ln 2 + x, \qquad x = \ln 2.$

3b. $\dfrac{2}{x} + \dfrac{x}{x+3} = 1$
$\dfrac{2(x+3)+x^2}{x(x+3)} = 1$ (Notera att $x = 0$ och $x = -3$ inte är rötter till ekvationen):
$2x + 6 + x^2 = x^2 + 3x$
$2x + 6 = 3x, \qquad \underline{x = 6}.$

V.g. vänd!

3c. $\tan 2x = 2$ ger
$2x = \arctan 2 + n\pi$ dvs.

$$x = \frac{\arctan 2}{2} + \frac{n\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

4. För vilka x är olikheten $f(x) = \dfrac{(2-x)(x+3)}{x+1} \geq 0$ uppfylld ?
Vi gör följande teckentabell:

		-3		-1		2	
$x+3$	-	0	+		+		+
$x+1$	-		-	0	+		+
$2-x$	+		+		+	0	-
$f(x)$	+	0	-	ej def	+	0	-

Vilket ger svaret: $x \leq -3$ eller $-1 < x \leq 2$.

5. Visa med induktionsbevis att formeln $P(n) : \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{j+1}{4} = \frac{(n+1)(n+2)}{8}$

gäller för $n = 0, 1, 2, \ldots.$

1. $P(0) : \dfrac{1}{4} = \dfrac{(0+1)(0+2)}{8}$ stämmer!

2. Antag nu $P(m) : \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \frac{j+1}{4} = \frac{(m+1)(m+2)}{8}$

$P(m+1) : \displaystyle\sum_{j=0}^{m+1} \frac{j+1}{4} = \frac{(m+2)(m+3)}{8}$ skall visas.

$$VL_{m+1} = \sum_{j=0}^{m} \frac{j+1}{4} + \frac{m+2}{4} = [\text{enl. antagandet}] = \frac{(m+1)(m+2)}{8} +$$
$$\frac{m+2}{4} = \frac{(m+2)}{8}(m+1+2) = \frac{(m+2)(m+3)}{8} = HL_{m+1} \quad \text{VSV}$$

1. och 2. medför enligt induktionsaxiomet att $P(n)$ gäller för alla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

6. Bestäm halveringstiden för en radioaktiv isotop som minskar till 10% av den ursprungliga mängden efter 1200 år.
Antag att den ursprungliga mängden är 1 viktsenhet.
Mängden m som funktion av tiden t kan då allmänt skrivas:
$m(t) = 2^{-t/T}$ där T är halveringstiden.
Man vet att $\quad m(1200) = 2^{-1200/T} = 1/10.$
Logaritmering ger:
$$\frac{-1200}{T}\ln 2 = -\ln 10, \qquad T = \frac{1200\ln 2}{\ln 10} \approx 361 \text{ år.}$$

7. Lös ekvationen $4|x| + |x-1| = 3.$ (3p)
Ekvationen kan skrivas om utan beloppstecken på följande sätt:
I. $x \geq 1: \quad 4x + x - 1 = 5x - 1 = 3$
II. $0 \leq x \leq 1: \quad 4x - (x-1) = 3x + 1 = 3$
III. $x \leq 0: \quad 4(-x) - (x-1) = -5x + 1 = 3$
Man får lösningar för respektive intervall:
I: $x = 4/5$ (ingår <u>ej</u> i intervall I.)
II: $x = 2/3$ (ingår i intervall II.)
III: $x = -2/5$ (ingår i intervall III.)
Svar: $x_1 = 2/3, \quad x_2 = -2/5$.

8. Lös den komplexa ekvationen $z^3 = -8i$.
Skriv rötterna på normalform utan att använda trigonometriska funktioner.
Vänsterledet på polär form: $z^3 = \left(re^{i\theta}\right)^3 = r^3e^{i3\theta}$.
Högerledet på polär form: $-8i = 8e^{i(-\pi/2+2n\pi)}, \quad n = 0, 1, 2.$
Man får
$r^3 = 8 = 2^3, \quad r = 2.$
$3\theta = -\pi/2 + 2n\pi.$
$n = 0: \quad \theta_0 = -\pi/6$
$n = 1: \quad \theta_1 = \pi/2$
$n = 2: \quad \theta_2 = 7\pi/6$
Eftersom $z_n = r(\cos\theta_n + i\sin\theta_n), \ n = 0, 1, 2..., \quad$ och $\quad r = 2$
får man
Svar: $z_0 = \sqrt{3} - i, \quad z_1 = 2i, \quad z_2 = -\sqrt{3} - i.$