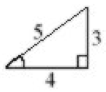
KTH Matematik

Lösningar till tentamen i Tal och funktioner, SF1643, för Bio, I och K den 19 januari 2008.

1a. $\dfrac{4^{5/4}}{8^{-1/6}} = 4^{5/4}8^{1/6} = (2^2)^{5/4}(2^3)^{1/6} = 2^{5/2}2^{1/2} = 2^{5/2+1/2} = 2^3 = \underline{8}.$

1b. $\ln\sqrt{5} + \dfrac{1}{5}\ln 25 = \dfrac{1}{2}\ln 5 + \dfrac{2}{5}\ln 5 = (\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{5})\ln 5 = \underline{\dfrac{9}{10}\ln 5}.$

1c. $\sin(2\arcsin(3/5)) = 2\sin(\arcsin(3/5))\cos(\arcsin(3/5)) =$



$= 2(3/5)(4/5) = \underline{24/25}.$

2. Lös ekvationen $2\sin^2 x = \cos 2x$, $\quad 2\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right) = \cos 2x$,

$1 - \cos 2x = \cos 2x$

$\cos 2x = 1/2 = \cos \pi/3$

$2x = \pm\pi/3 + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

$\underline{x = \pm\pi/6 + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...}$

Anm: Svaret är ekvivalent med:

$x = \pi/6 + 2n\pi, \quad x = 5\pi/6 + 2n\pi, \quad x = -\pi/6 + 2n\pi, \quad x = 7\pi/6 + 2n\pi.$

V.g. vänd!

3a. $(*) \quad x + \sqrt{x} = 6$

$\sqrt{x} = 6 - x \Longrightarrow$

$x = (6-x)^2 = 36 - 12x + x^2$

$x^2 - 13x + 36 = 0$

$x = 13/2 \pm \sqrt{169/4 - 36} = 13/2 \pm \sqrt{25/4} = 13/2 \pm 5/2,$

$x_1 = 9, \quad x_2 = 4.$ Prövning i (*) :

$x_1 = 9: \quad VL = 9 + 3 = 12, \quad HL = 6$ stämmer inte.

$x_2 = 4: \quad VL = 4 + 2 = 6 = HL$, stämmer.

Svar: $\underline{x = 4}$.

3b. $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{6},$

$\dfrac{x^2 - x - 1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{6}$,

$6(x^2 - x - 1) = x^2 + x \quad \left[x \neq 0,\ x \neq -1 \text{ antas }\right]$

$5x^2 - 7x - 6 = 0, \quad x^2 - (7/5)x - 6/5 = 0,$

$x = 7/10 \pm \sqrt{49/100 + 6/5} = 7/10 \pm \sqrt{169/100} = 7/10 \pm 13/10.$

Svar: $\underline{x = 2, \quad x = -3/5}$.

3c. $\sin 3x = -\dfrac{1}{2}$ ger

$\sin 3x = \sin(-\pi/6)$

$3x = -\pi/6 + 2n\pi, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

$x = -\pi/18 + 2n\pi/3$

eller

$3x = \pi + \pi/6 + 2n\pi = 7\pi/6 + 2n\pi$

$x = 7\pi/18 + 2n\pi/3$

Svar: $\underline{x = -\pi/18 + 2n\pi/3 \text{ eller } x = 7\pi/18 + 2n\pi/3, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...}$

4. För vilka x är olikheten $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2(x-1)} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{x^2(x-1)} \geq 0$ uppfylld ?

Vi gör följande teckentabell:

		-2		0		1		2	
$x+2$	-	0	+		+		+		+
x^2	+		+	0	+		+		+
$x-1$	-		-		-	0	+		+
$x-2$	-		-		-		-	0	+
$f(x)$	-	0	+	ej def	+	ej def	-	0	+

Vilket ger svaret: $-2 \leq x < 0$ eller $0 < x < 1$ eller $2 \leq x$.

5. Bestäm koefficienten för x^3 i utvecklingen av $\left(2x + \frac{1}{3x}\right)^{11}$.

$\left(2x + \frac{1}{3x}\right)^{11} = ... \binom{11}{4}(2x)^7 \cdot (1/3x)^4 + ...$

$= ... \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 2^7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^4} x^3 + ...$

$= ... \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 2^7}{3^5} x^3 + ... = ... + \frac{110 \cdot 128}{3^3} x^3 = ... + \frac{14080}{27} x^3 + ...$.

Svar: $\underline{\frac{14080}{27}}$.

6. En bakteriepopulation tillväxer exponentiellt och har blivit 1000 gånger större på 10 timmar. Bestäm fördubblingstiden och avgör om denna är längre eller kortare än 1 timme.

Antag att fördubblingstiden är T.
Villkoret ´ blivit 1000 gånger större på 10 timmar ´ innebär att
$2^{10/T} = 1000 = 10^3$. Man får: $\frac{10}{T} \ln 2 = 3 \ln 10$, $\underline{T = \frac{10 \ln 2}{3 \ln 10}}$

Om fördubblingstiden T hade varit exakt 1 timme, hade populationen vuxit till $2^{10} = 1024 > 1000$ efter 10 timmar, vilket innebär en snabbare tillväxt än den aktuella.
Därför är $\underline{T > 1}$. $(T \approx 1.0034)$.

7. Bestäm alla komplexa rötter till ekvationen $z^4 - 5z^3 + 8z^2 + 7z + 13 = 0$
Ledning: En rot är $z = 3 + 2i$.

Eftersom nollställena till reella polynom är parvis konjugerade är $(z - 3 - 2i)(z - 3 + 2i) = (z - 3)^2 + 4 = z^2 - 6z + 13$ en faktor till det givna polynomet.
Polynomdivision visar att $z^4 - 5z^3 + 8z^2 = (z^2 - 6z + 13)(z^2 + z + 1)$.
Kvoten $z^2 + z + 1$ har nollställena $-1/2 \pm i\sqrt{3}/2$

Svar: Polynomets fyra nollställen är : $\underline{3 \pm 2i \text{ och } -1/2 \pm i\sqrt{3}/2}$.

V.g. vänd!

8. Visa att $(2n)!$ är jämnt delbart med 2^{n+3} för $n = 4, 5, 6....$

Vi visar med induktionsbevis att påståendet $A(n)$: $(2n)! = k_n 2^{n+3}$ är sant för $n = 4, 5, 6...$, där k_n är ett helt tal som kan variera med n.
1. $A(4) : (2 \cdot 4)! = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 2^3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 = 2^7 \cdot (7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3) = k \cdot 2^{4+3}$, sant!

Antag $A(m)$: $(2m)! = k_m 2^{m+3}$.
$A(m+1)$: $(2(m+1))! = k_{m+1} 2^{m+4}$ skall visas .
$VL_{m+1} = (2(m+1))! = (2m+2)(2m+1)(2m)! = [A(m)$ antas$] = 2(m+1)(2m+1)k_m 2^{m+3} = (m+1)(2m+1)k_m \cdot 2 \cdot 2^{m+3} = k_{m+1} 2^{m+4}$.
Alltså är
2. $A(m) \Longrightarrow A(m+1)$ visat för hela tal $m \geq 4$. Eftersom 1. och 2. gäller medför induktionsaxiomet att $A(n)$ gäller för $n = 4, 5, 6....$ VSB.