KTH Matematik

SF1643 Tal och funktioner. Lappskrivning 16/10-2008, version B.

Namn och personnummer:

1. Lös ekvationen $5^x + 5^{x+1} = 36$.
2. Lös ekvationen $|x-1| - 3x = 5$.
3. Visa med hjälp av induktion att

$$\sum_{j=0}^{n} 3^j = \frac{3^{n+1}-1}{2} \quad \text{för } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

LYCKA TILL!

Förslag på lösningar.

1. Vi har $5^x + 5^{x+1} = 5^x + 5 \cdot 5^x = 6 \cdot 2^x$, så ekvationen kan skrivas

$$6 \cdot 5^x = 36 \iff 5^x = 6 \iff \ln(5^x) = \ln 6 \iff x \ln 5 = \ln 6 \iff x = \frac{\ln 6}{\ln 5}.$$

Ekvationen har alltså den unika lösningen $x = \frac{\ln 6}{\ln 5}$.

2. Vi delar upp i två fall.

$x \leq 1$: I detta fall är $x - 1 \leq 0$ och ekvationen är ekvivalent med

$$-(x-1) - 3x = 5 \iff x = -1.$$

I intevallet $x \leq 1$ är alltså $x = -1$ en lösning.

$x \geq 1$: Här är $x - 1 \geq 0$ och ekvationen är ekvivalent med

$$(x-1) - 3x = 5 \iff x = -3.$$

Talet -3 ligger inte i det betraktade intevallet. Alltså finns det ingen lösning i detta fall.

Således, den givna ekvationen har den enda lösningen $x = -1$.

3. Låt $P(n)$ vara påståendet att $\sum_{j=0}^{n} 3^j = \frac{3^{n+1}-1}{2}$.

Bassteg: För $n = 1$ har vi $1 + 3 = \frac{3^2-1}{2}$ vilket stämmer, dvs $P(1)$ gäller.

Induktionssteg: Vi vill nu visa att för varje $m \geq 1$ gäller att $P(m) \Rightarrow P(m+1)$.

Antag att $P(m)$ gäller för något $m \geq 1$, dvs antag att

$$\sum_{j=0}^{m} 3^j = \frac{3^{m+1}-1}{2}.$$

Vi ska nu visa att då gäller också $P(m+1)$. Vi har

$$\sum_{j=0}^{m+1} 3^j = \sum_{j=0}^{m} 3^j + 3^{m+1} = [\text{ind.ant.}] = \frac{3^{m+1}-1}{2} + 3^{m+1} = \frac{3^{m+1} - 1 + 2 \cdot 3^{m+1}}{2} = \frac{3^{m+2}-1}{2}.$$

Detta är precis vad vi ville bevisa.

Således följer det från induktionsprincipen att $P(n)$ gäller för alla $n \geq 1$.