Lösningsförslag – Linj. alg 2009-03-11

1 (a) $P_1 = (1,0,1)$, $P_2 = (2,1,2)$, $P_3 = (3,2,1)$

$$\bar{v}_1 := \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\bar{v}_2 := \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Låt $\bar{n} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$; normal till Π.

$P_1 = (1,0,1) \in \Pi$

$$\Rightarrow \quad 1(x-1) - 1(y-0) + 0\cdot(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x - y - 1 = 0}}.$$

(b) $P = (4,0,1)$.

$$d(P, \Pi) = \frac{|4 - 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \underline{\underline{\frac{3}{\sqrt{2}}}}$$

Alt.

$$(4,0,1) + t(1,-1,0) \in \pi$$

$$\Leftrightarrow \quad (4+t, -t, 1) \in \pi$$

$$\Leftrightarrow \quad 4+t-(-t)-1=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3+2t=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=-\frac{3}{2}.$$

$$\Rightarrow \quad |t(1,-1,0)| = \frac{3}{2}\,|(1,-1,0)| = \underline{\underline{\frac{3}{\sqrt{2}}}}$$

(2) (a) $\det A = \cancel{12} + 2a - \cancel{12} - a^2 = -(a^2 - 2a)$

$$= -a(a-2)$$

Det följer att $\det A \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ och $a \neq 2$.

A är inverterbar $\Leftrightarrow$ $a \neq 0$ och $a \neq 2$.

(b) $a = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 11 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 & 2 \end{array}\right), \text{ så } \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

<u>Kontroll</u>: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \underline{\text{OK}}$$

③ (a) $\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \lambda_3 \bar{v}_3 = \bar{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \\ (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sett $\lambda_3 = t \Rightarrow \lambda_2 = 2t$, $\lambda_1 = -3t$

Altså: fins ikke-triv. løsning, så de er

<u>lineært avhengige</u>.

(b) $\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \lambda_3 \bar{v}_3 = \bar{v}$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Løsning mangler. Nei, $\bar{v}$ kan ikke skrives som

en lineærkomb. av $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$.

(4) $y = a + bx.$

Innsetting av punktene gir det overbest. syst.

$$\begin{cases} a + b = 6 \\ a + 2b = 7 \\ a + 3b = 14 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$$

La $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A\bar{x} = \bar{b}$, Normalekv. blir

$$A^t A \bar{x} = A^t \bar{b}$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A^t \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 62 \end{pmatrix}$$

$$A^t A^t \bar{x} = A^t \bar{b}.$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 27 \\ 6 & 14 & 62 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 27 \\ 0 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

$(a \quad b)$

Så $b = 4$ og $a = \dfrac{27 - 6 \cdot 4}{3} = 1.$

$\underline{y = 1 + 4x}$ passer best i minstekvadratmening.

(5)

(a) $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -18 & 10 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = 0 \iff \begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 \\ -18 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\iff (-5-\lambda)(10-\lambda) + 54 = 0$

$\iff \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

$\iff (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$

$\iff \lambda = 1$ eller $\lambda = 4$.

$\underline{\lambda = 1}$ $(A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0} \iff \left(\begin{array}{cc|c} -6 & 3 & 0 \\ \cancel{-18} & \cancel{9} & 0 \end{array}\right)$

så $\bar{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$, är egenvekt.

med egenvärde $\lambda = 1$

$\underline{\lambda = 4}$ $(A - \lambda I)\bar{x} = 0 \iff \left(\begin{array}{cc|c} -9 & 3 & 0 \\ \cancel{-18} & \cancel{6} & 0 \end{array}\right)$

så $\bar{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$, är egenvekt.

med egenvärde $\lambda = 4$.

Låt $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Då blir $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$,

dvs $A = PDP^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}P^{-1}$.

(b) Låt $B = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Klart då att $B^2 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} = A$.

Denna matris B duger alltså. Vi har

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Kontroll: $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -18 & 10 \end{pmatrix} = A.$$

OK

(6) $L(\bar{x}) = \bar{x} - \frac{\bar{x}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|^2}\bar{n}$, där $\bar{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow L(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 - \frac{\bar{e}_1\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|^2}\bar{n} =$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 2/6 \\ -1/6 \end{pmatrix}$

$L(\bar{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-2}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/6 \\ 2/6 \\ 2/6 \end{pmatrix}$

$L(\bar{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/6 \\ 2/6 \\ 5/6 \end{pmatrix}$

dvs L:s matris är $\begin{pmatrix} 5/6 & 2/6 & -1/6 \\ 2/6 & 2/6 & 2/6 \\ -1/6 & 2/6 & 5/6 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Alt. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+t \\ y-2t \\ z+t \end{pmatrix} \in \overline{u}$

$\Leftrightarrow \quad x + t - 2(y - 2t) + z + t = 0$

$\Leftrightarrow \quad x - 2y + z + t(1 + 4 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad t = -\frac{1}{6}(x - 2y + z)$

$\Rightarrow \quad L(\overline{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{6}(x - 2y + z) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5/6\, x + 2/6\, y - 1/6\, z \\ 2/6\, x + 2/6\, y + 2/6\, z \\ -1/6\, x + 2/6\, y + 5/6\, z \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(7)

$$\bar{x}(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ -0,3 & 1,3 \end{pmatrix} \bar{x}(k) = A\bar{x}(k)$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0,4-\lambda & 0,6 \\ -0,3 & 1,3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 1,7\lambda + 0,52 + 0,18 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 1,7\lambda + 0,7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = 0,85 \pm \sqrt{0,85^2 - 0,7}$$

$$= 0,85 \pm \sqrt{(1-0,15)^2 - 0,7}$$

$$= 0,85 \pm \sqrt{\cancel{1} - \cancel{0,3} + 0,15^2 - \cancel{0,7}}$$

$$= 0,85 \pm \sqrt{0,15^2} = 0,85 \pm 0,15.$$

$\lambda = 1$ och $\lambda = 0,7$ är egenvärden.

$\underline{\lambda = 1}$ $\left(\begin{array}{cc|c} -0,6 & 0,6 & 0 \\ \cancel{-0,3} & \cancel{0,3} & 0 \end{array}\right)$; $\bar{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$,

är egenvektorer med egenvärde 1.

Sätt $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda = 0,7}$ $\left(\begin{array}{cc|c} -0,3 & 0,6 & 0 \\ \cancel{-0,3} & \cancel{0,6} & 0 \end{array}\right)$; $\bar{x} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$

är egenvekt. med ev. 0,7. Låt $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(8)

$$AXA = AX + I$$

$$\Leftrightarrow \quad AXA - AX = I$$

$$\Leftrightarrow \quad AX(A-I) = I$$

$$\Leftrightarrow \quad X = A^{-1} I (A-I)^{-1}$$

da A, $A-I$ er invertible

Vi har $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad X = A^{-1}(A-I)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}}}$$

<u>Kontrol</u> $VL = AXA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 28 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$$

$HL = AX + I = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 28 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$\bar{v}_1, \bar{v}_2$ är bas för $\mathbb{R}^2$ bestående av

egenvektorer till A.

$$\bar{x}(n) = A\,\bar{x}(n-1) = \_\_ = A^n\,\bar{x}(0).$$

Nu är $\bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 = \bar{x}(0) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$
$$(\alpha_1 \quad \alpha_2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

dvs $\alpha_2 = -1$ och $\alpha_1 = 4$.

$$\Rightarrow \bar{x}^{(n)} = A^n(\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2) =$$

$$= \alpha_1 \lambda_1^n \bar{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2^n \bar{v}_2 =$$

$$= 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - (0,7)^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad n \to \infty$$

Alltså: $x(n) \to 4$, $y(n) \to 4$, $n \to \infty$.