SF1645, omtenta, 090603

1a. ℓ ges på parameterform som

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2t \\ 3+t \end{pmatrix}$$

insättning i ekvationen för π ger

$$1+t - 2t + 3+t = 1 \iff 4 = 1$$

som saknar lösning.

b) Då ℓ och π inte skär varandra och ligger i $\mathbb{R}^3$ är de parallella.
(kan också räknas explicit.) Så tag en punkt på ℓ, en på π, projicera differensen på normalen till π.
T. ex. $x = (1,0,3) \in \ell$

$y = (1,0,0) \in \pi$

$x - y = (0,0,3)$.

normaliserad normalvektor: $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) = n$.

och $n \cdot (x-y) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

så avståndet mellan π och ℓ är $\sqrt{3}$.

2) Skriv om som $AX = C - B$.

$$C - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi Gausseliminerar nu:

$$(A|C-B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 Minsta kvadratlösningen ges av

$A^t A x = A^t b$. I vårt fall

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 14 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Detta ger $X = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{17}{35} \end{pmatrix}$, dvs

$x_1 = \frac{3}{5}$ och $x_2 = \frac{17}{35}$.

4a Det är 3 vektorer i $\mathbb{R}^3$ och då räcker det att visa att de är linjärt oberoende. Vektorerna är linjärt oberoende om

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Vi får $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0+8+3-2-0-6=3\neq 0$

Så vektorerna bildar en bas.

4b Koordinaterna bestäms ur

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right)$$ som ger

koordinaterna $(-1, 2, -1)$.

5

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & 1 \\ x & x & x & 1 \\ x & x & 2x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x & 1 \\ 0 & x-x^2 & x-x^2 & 1-x \\ 0 & x-x^2 & 2x-x^2 & 1-x \\ 0 & 1-x & 1-x & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & x & x & 1 \\ 0 & 1-x & 1-x & 0 \\ 0 & x-x^2 & 2x-x^2 & 1-x \\ 0 & x-x^2 & x-x^2 & 1-x \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & x & x & 1 \\ 0 & 1-x & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & x & 1-x \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} =$$

$$= -(1-x)^2 \cdot x = 0$$, vilket ger

$x = 1$ eller $x = 0$.

6 ~~7~~ Låt $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ vara normalvektorn

till π. Då gäller att

$$L\vec{x} = \vec{x} - 2 \cdot \frac{\langle \vec{x}, \vec{n} \rangle}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n}.$$

Vi får då att:

$$L\bar{e}_1 = 1/9 \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$L\bar{e}_2 = 1/9 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$L\bar{e}_3 = 1/9 \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\therefore$ L:s matris är (i standardbasen):

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

7a $\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$

$$= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

$\therefore \det(A-\lambda I) = 0$ ger lösningarna

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3.$

Egenvektorer: $Av_1 = \lambda_1 v_1 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$Av_2 = \lambda_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$Av_3 = \lambda_3 v_3 \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}.$

$\therefore A = PDP^{-1}$ där $D = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

och $P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}.$

7b $A^{-n} = PD^{-n}P^{-1}$ där $D^{-n} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^{-n}&0\\0&0&3^{-n}\end{pmatrix}.$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} A^{-n} = P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}$

Då $P^{-1} = \begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ ser vi att

$\lim\limits_{n\to\infty} A^{-n} = \begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

8 Då $\det(A-\lambda I) = \det((A-\lambda I)^t) =$

$= \det(A^t - \lambda I)$ ser vi att

$\lambda_1 = 1$ är ett egenvärde till $A \iff$

$\lambda_1 = 1$ är ett egenvärde till A^t.

Vi ser nu att $A^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ d+e+f \\ g+h+i \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$\therefore$ $\lambda_1 = 1$ är ett egenvärde till A^t, och

även egenvärde för A.