KTH Matematik

Partiella differentialekvationer för ME SF1648 och K Matematik FK

Tentamen onsdag 2009–06–01, kl $08^{00} - 13^{00}$

Hjälpmedel: BETA Mathematics Handbook.
Räknedosa utan program.

Obs 1: Uppgifterna är ordnade varken kurskronologiskt eller efter svårighetsgrad.

Obs 2: Behandla inte mer än en uppgift per blad.
Varje steg i lösningen skall motiveras.
Bristfällig motivering kan ge poängavdrag.
Skriv namn och personnummer på varje inlämnat ark.
Fyll i antalet inlämnade ark på omslaget.

Tentamen består av fem uppgifter, vilka sammanlagd ger 25 poäng.
En summa av 11 poäng garanterar ett godkänt resultat.
Efter tentans slut publiceras ett lösningsförslag på nätet.

Ansvarig: Franz J Čech

---

1) Bestäm med hjälp av en potensserieansats av typen

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

den s k Frobenius's metoden, där r är ett obestämt tal, den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$2x^2 y'' + (3x + 2x^2)y' - (1 - x)y = 0 \tag{1}$$

kring $x = 0$.
Det räcker att ta med de fyra första termerna skilda från noll i vardera lösningen.

---

2) Bestäm de radiella svängningarna $u(\rho, t)$ av en tunn, cirkulär trumskiva om problemet beskrivs av sambanden

$$\texttt{PDE:}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < \rho < 1,\ \ t > 0 \tag{2}$$

$$\begin{array}{ll} \texttt{RV1:}\, u(1,t) = 0, & \texttt{RV2:}\, u(0,t) < \infty, \quad t > 0 \\ \texttt{BV1:}\, u_t(\rho,0) = 0, & \texttt{BV2:}\, u(\rho,0) = J_0(\alpha_{0,1}\rho) + J_0(\alpha_{0,2}\rho), \qquad 0 < \rho < 1 \end{array}$$

där $\alpha_{0,1}$ resp $\alpha_{0,2}$ är den första resp andra roten till J_0.

---

3) Bestäm en lösning $u = u(x,t)$ till följande begynnelse-/randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} \texttt{PDE:}\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1,\ t > 0 && (3) \\ \texttt{RV:}\ u_x(0,t) &= 0,\ u(1,t) = 3, \quad t > 0 && (4) \\ \texttt{BV:}\ u(x,0) &= 3 + \cos\frac{3\pi x}{2}, \quad 0 < x < 1. && (5) \end{aligned}$$

---

4) En värmeledare har formen av en tunn, homogen, kvadratisk, planparallell skiva med sidorna av längden $L = \pi$.
Sidan längs $x-$axeln är isolerad, sidan längs $y = \pi$ hålls på den konstanta temperaturen T_0 =100°C och de båda 'vertikala' sidorna, $x = 0, x = \pi$, hålls på den konstanta temperaturen $T = 0$°C. Skivans plana ytor hålls isolerade.
Dessa förhållanden beskrivs av Laplace ekvationen

$$\texttt{PDE:}\ \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi$$

och randvillkoren

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) &= 0, && (6) \\ u(x,\pi) &= 100 && (7) \\ u(0,y) &= u(\pi,y) = 0 && (8) \end{aligned}$$

Du skall beräkna den stationära temperaturfördelningen $u(x,y)$ på plattan.

---

5) Begynnelsetemperaturen (vid $t = 0$) av en tunn, homogen platta, $x \in (0,1), y \in (0,2)$ i xy-planet ges av funktionen $f(x,y) = xy$. De plana ytorna är helt isolerade. För $t > 0$ hålls ränderna av plattan vid temperaturen 0° C och $u(x,y,\infty)$ begränsad.
I matematiska termer beskrivs förhållanden i vårt fall av:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} && (9) \\ u(x,y,0) &= xy,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 2 && (10) \\ u(0,y,t) &= u(1,y,t) = u(x,0,t) = u(x,2,t) = 0, && (11) \\ \text{för} &\quad 0 < x < 1,\ 0 < y < 2,\ t > 0 && (12) \end{aligned}$$

Bestäm temperaturfunktionen $u(x,y,t)$.

Lycka till! *Franz J*