Partiella differentialekvationer för ME SF1648 och K

LÖSNINGSFÖRSLAG till Tentamen 2009–06–01

---

1) Lösning

Att $x = 0$ är en reguljär singulär punkt inses p g a att $p_0 = \frac{3}{2}$ och $q_0 = -\frac{1}{2}$. Ansätt

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \tag{1}$$

$$\Longrightarrow \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} \tag{2}$$

som leder efter insättning i den givna ODE'n ekv(1) till

$$\begin{aligned} 0 = &\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)a_n x^{n+r} \\ + &\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)a_n x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} \end{aligned} \tag{3}$$

Förkortning med x^r och omindexering ger av första sambandet i ekv(3) för $n = 0$ direkt indexekvationen

$$2r(r-1) + 3r - 1 = 0 \Longrightarrow r_1 = \frac{1}{2}, \; r_2 = -1 \tag{4}$$

och för $n \geq 1$ får vi sedan rekursionsformeln

$$a_n(r) = -\frac{1}{n+r+1}\, a_{n-1} \tag{5}$$

och slutligen blir

$$a_n\left(r = \frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{2n+3}\, a_{n-1} \;\text{ och }\; a_n(r=-1) = -\frac{1}{n}\, a_{n-1} \tag{6}$$

Våran lösning består alltså av

$$y_1(x) = x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(r = \frac{1}{2}\right) x^n \;\text{ och }\; y_2(x) = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r=-1) x^n$$

Bestämning av de 4 första från noll skilda termerna i y_1 och y_2:

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}: \qquad a_1 = -\frac{2}{5}a_0,\; a_2 = -\frac{2}{7}a_1 = \frac{4}{35}a_0,\; a_3 = -\frac{2}{9}a_2 = -\frac{8}{315}a_0 \tag{7}$$

$$\mathbf{r = -1}: \qquad a_1 = -a_0, a_2 = -\frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}a_0, a_3 = -\frac{1}{3}a_2 = -\frac{1}{6}a_0 \tag{8}$$

Sätter vi först $a_0 = 1$ i ekv(7),(8) och introducerar 2 nya, obestämda, konstanter A och B erhåller vi svaret $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ eller

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) \quad &= \quad Ax^{1/2}\left(1 - \frac{2}{5}x + \frac{4}{35}x^2 - \frac{8}{315}x^3 + \cdots\right) \ + \\ &\quad + Bx^{-1}\left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \cdots\right) \end{aligned}}$$

2) Lösning

Eftersom vi har homogena randvillkor kan vi direkt börja med en variabelsubstitution $u = R(\rho)T(t)$ och erhåller snabbt efter insättning i `PDE`

$$\frac{R'' + \frac{1}{\rho}R'}{R} = \frac{T''}{T} = k \ldots \text{separationskonstanten} \tag{9}$$

med randvillkoren `RV:`

$$T'(0) = 0, \tag{10}$$

$$R(1) = 0, \qquad R(0) < \infty \tag{11}$$

Eftersom vi måste ha en svängning i $t-$led sätter vi $k = -\lambda^2 < 0, \lambda > 0$ och får

$$T'' + \lambda^2 T = 0 \Longrightarrow T = A\cos(\lambda t) + B\sin(\lambda t) \tag{12}$$

$T'(0) = 0$ kräver $B = 0$ innebärande att vi får $T(t) = \cos(\lambda t)$, där vi satte $A = 1$ eftersom vi ändå får en ytterliggare konstant via R-delen.
För R har vi sambandet, se ekv(9)

$$\frac{R'' + \frac{1}{\rho}R'}{R} = -\lambda^2 \Longrightarrow \rho^2 R'' + \rho R' + \lambda^2\rho^2 R = 0 \tag{13}$$

som är Bessels differentialekvation av nollte ordning med lösningen

$$R(\rho) = aJ_0(\lambda\rho) + bY_0(\lambda\rho) \tag{14}$$

Ekv(10) ger direkt $B = 0$ och ekv(11) ger $b = 0$, alltså $R(1) = J_0(\lambda) = 0$ vilket betyder att $\lambda = \alpha_{0,n}$ den n-te roten av J_0, $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Alla resultat hittills sammantaget leder till produktlösningen

$$u_n(\rho, t) = R_n(\rho)T_n(t) = a_n J_0(\alpha_{0,n}\rho)\cos(\alpha_{0,n}t) \tag{15}$$

Superposition ger oss nu delsvaret

$$u(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\alpha_{0,n}\rho)\cos(\alpha_{0,n}t) \tag{16}$$

Återstår beräkningen av a_n m h a anpassning till villkoret `BV2:`

$$u(\rho, 0) = J_0(\alpha_{0,1}\rho) + J_0(\alpha_{0,2}\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\rho, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\alpha_{0,n}\rho) \tag{17}$$

Identifiering i ekv(17) av resp termer ger $a_1 = a_2 = 1$ och $a_n = 0$ för $n \geq 3$
Detta resulterar i svaret

$$\boxed{u(\rho,t) = J_0(\alpha_{0,1}\rho)\cos(\alpha_{0,1}t) + J_0(\alpha_{0,2}\rho)\cos(\alpha_{0,2}t)}$$

3) Lösning

Vi börjar med att söka en stationär lösning $u_s(x)$ som satisfierar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{18}$$

och får snabbt

$$u_s(x) = Ax + B \tag{19}$$

Anpassning till RV ger $A = 0$ och $B = 3$

$$u_s(x) = 3 \tag{20}$$

men denna lösning satisfierar inte BV! För den skull ansätter vi

$$u(x,t) = u_s(x) + v(x,t) \tag{21}$$

som skall anpassas till de givna `RV` och `BV`:

$$\begin{aligned}
u_x(0,t) = 0 &= 0 + v_x(0,t), \Longrightarrow v_x(0,t) = 0 & (22)\\
u(1,t) = 3 &= 3 + v(1,t), \Longrightarrow v(1,t) = 0 & (23)\\
u(x,0) = 3 + \cos\frac{3\pi x}{2} &= 3 + v(x,0) \Longrightarrow v(x,0) = \cos\frac{3\pi x}{2} & (24)
\end{aligned}$$

Sammanfattningsvis får vi ett homogent problem för $v(x,t)$ med

$$\begin{aligned}
v_x(0,t) &= v(1,t) = 0 & (25)\\
v(x,0) &= \cos\frac{3\pi x}{2} & (26)
\end{aligned}$$

Nu kan vi använda variabelseparation $v(x,t) = X(x)T(t)$ med

$$X'(0) = X(1) = 0 \tag{27}$$

och får

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = \lambda = -\alpha^2,\ \alpha > 0 \tag{28}$$

Att vi väljer separationskonstanten mindre än noll beror på att vi annars enbart får triviala lösningar med våra `RV`.
Detta leder till

$$v(x,t) = (a\cos(\alpha x) + b\sin(\alpha x))\mathrm{e}^{-\alpha^2 t} \tag{29}$$

Ekv(27) leder till $b = 0$ och $\cos\alpha 1 = 0$ m a o $\alpha_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ som ger delsvaret

$$v_n(x,t) = a_n\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\,x\right)\mathrm{e}^{-\alpha_n^2 t} \tag{30}$$

Konstanten a_n bestäms nu genom anpassning till (26)

$$v(x,0) = \cos\frac{3\pi x}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}x\right) \tag{31}$$

a_n får vi i detta fall enkelt genom att identifiera båda led och inser att n måste vara 1 och vidare att $a_1 = 1$, m a o

$$v(x,t) = \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \mathrm{e}^{-(3\pi/2)^2 t} \tag{32}$$

Det totala svaret blir nu

$$\boxed{u(x,t) = 3 + \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \mathrm{e}^{-(3\pi/2)^2 t}}$$

4) Lösning

Vi provar med variabelsubstitution, m a o vi söker en produktlösning på formen

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \tag{33}$$

Insättning i `PDE` ger snabbt

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \Longrightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -k^2,\ k > 0 \tag{34}$$

med randvillkoren $X(0) = X(\pi) = 0,\ X(x)Y(\pi) = 100,\ Y'(0) = 0.$
Sambanden (34) ger lösningarna

$$X(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx \quad \text{och} \quad Y(y) = D_1 \cosh ky + D_2 \sinh ky \tag{35}$$

Det första randvillkoret ger $X(0) = 0 = C_1$ och det andra $X(\pi) = 0 = 0 + C_2 \sin k\pi$.
Eftersom $C_2 \neq 0$ följer att $\sin k\pi = 0$, m a o $\quad k = n = 1, 2, 3, ...$
Hittills har vi fått:

$$X(x) = C_2 \sin nx \quad \text{och} \quad Y'(y) = nD_1 \sinh ny + nD_2 \cosh ny \tag{36}$$

Det fjärde randvillkoret ger oss nu

$$Y'(0) = 0 = nD_2, \implies D_2 = 0 \quad \text{och} \quad Y(y) = D_1 \cosh ny \tag{37}$$

så ekv(33) har lösningarna

$$u_n(x,y) = C_2 D_1 \sin nx \cosh ny = A_n \sin nx \cosh ny \tag{38}$$

På grund av lineariteten kan vi använda superposition av alla $u_n(x,y)$ och vi får

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx \cosh ny \tag{39}$$

Nu kan vi använda det tredje randvillkoret

$$u(x,\pi) = 100 = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cosh n\pi) \sin nx, \quad 0 \leq x \leq \pi \tag{40}$$

Detta är en Fourier-sinusutveckling av en konstant funktion och vi får koefficienterna

$$A_n \cosh n\pi \int_0^\pi \sin^2 nx dx = 100 \int_0^\pi \sin nx dx = \frac{100}{n}(1-(-1)^n) \tag{41}$$

Härmed får vi för udda n:

$$(A_n \cosh n\pi)\frac{\pi}{2} = \frac{200}{n}, \quad n = 1, 3, 5, ... \tag{42}$$

eller

$$A_{2m+1} = \frac{400}{(2m+1)\pi \cosh(2m+1)\pi}, \quad m = 0, 1, 2, ... \tag{43}$$

och slutsvaret blir

$$\boxed{u(x,y) = \frac{400}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)x\cosh(2m+1)y}{(2m+1)\cosh(2m+1)\pi}}$$

---

5) Lösning

Vi försöker med variabelsubstitution

$$u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t) \tag{44}$$

med randvillkoren

$$X(0) = Y(0) = X(1) = Y(2) = 0 \tag{45}$$

Insättning av samband (44) i ekv(9) i texten ger

$$\begin{aligned} \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} &= \frac{T'}{T} = -k^2,\ k > 0 && (46)\\ \Longrightarrow \frac{X''}{X} = -k_1^2,\ k_1 > 0, \ \text{och}\ &\frac{Y''}{Y} = -k_2^2,\ k_2 > 0 && (47)\\ \Longrightarrow X'' = -k_1^2 X,\ Y'' = -k_2^2 Y,\ \text{och}\ &T' = -k^2 T, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2 && (48) \end{aligned}$$

Att vi valde $-k^2$ i ekv(46) beror på att med $+k^2, k > 0$ hade $T \to \infty$, då $t \to \infty$. Därför måste också k_1^2, k_2^2 i ekv(47) ha negativa förtecken.
De allmänna lösningarna till ekv(48) är

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 \cos k_1 x + D_1 \sin k_1 x && (49)\\ Y(y) &= C_2 \cos k_2 y + D_2 \sin k_2 y && (50)\\ T(t) &= C\mathrm{e}^{-k^2 t} && (51) \end{aligned}$$

De två första `RV` i ekv(45) ger $C_1 = C_2 = 0$ och de två sista `RV` kräver

$$D_1 \sin k_1 1 = 0, \quad D_2 \sin k_2 2 = 0 \tag{52}$$

Eftersom $D_1 = D_2 = 0$ leder till den triviala lösningen $u(x,y,t) \equiv 0$ återstår

$$\sin k_1 = 0 \text{ och } \sin k_2 2 = 0 \tag{53}$$

d v s endast egenvärden

$$k_1 = m\pi,\ m = 1, 2, 3, ... \text{ och } k_2 = n\pi/2,\ n = 1, 2, 3, ... \tag{54}$$

duger.
Detta leder nu till

$$k_{mn}^2 = (m\pi)^2 + \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2, \text{ för alla } m, n \in \mathbb{Z}_+ \tag{55}$$

Allt som allt får vi oändligt många lösningar

$$u_{mn} = c_{mn}\mathrm{e}^{-k_{mn}^2 t}\sin(m\pi x)\sin(n\pi y/2) \text{ där } c_{mn} = CD_1D_2 \tag{56}$$

som kan superponeras till dubbelserien

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}\mathrm{e}^{-k_{mn}^2 t}\sin(m\pi x)\sin(n\pi y/2) \tag{57}$$

Denna lösning skall nu anpassas till `BV` $u(x, y, 0) = xy$, alltså

$$xy = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}\sin(m\pi x)\sin(n\pi y/2) \tag{58}$$

Multiplikation av båda leden med $\sin(m\pi x)\sin(n\pi y/2)$ och integration av x från 0 till 1, resp y från 0 till 2 ger

$$\int_0^1 x\sin(m\pi x)dx \int_0^2 y\sin(m\pi y/2)dy = c_{mn}\int_0^1 \sin^2(m\pi x)dx \int_0^2 \sin^2(m\pi y/2)dy \tag{59}$$

Integralerna beräknar vi m h a BETA och får snabbt

$$-\frac{(-1)^m}{m\pi}\cdot -\frac{4(-1)^n}{n\pi} = \frac{4(-1)^{m+n}}{mn\pi^2} = c_{mn}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 \tag{60}$$

Insättning av c_{mn} i ekv(57) resulterar i svaret

$$\boxed{u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8(-1)^{m+n}}{mn\pi^2}\,\mathrm{e}^{-k_{mn}^2 t}\sin(m\pi x)\sin(n\pi y/2)}$$

$$\text{där } k_{mn}^2 = (m\pi)^2 + \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2, \text{ för alla } m, n \in \mathbb{Z}_+ \tag{61}$$
