KTH Matematik

5B1134 Matematik och modeller
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 2, 2006

Uppgift

a) I en triangel är sidorna $a = 4, b = 5$ och $c = 6$ längdenheter, och de respektive motstående hörn har vinklar α, β och γ. Alla vinklarna är mindre än 90 grader. Bestäm $\cos$ till de tre vinklarna i triangeln. **(3)**

b) Vi har en cirkel med radie 5, och en cirkelsektor med vinkel $\alpha = \pi/5$ radianer. Cirkelsektoren bestäms av två punkt P och Q på cirkeln. Hur lång är båglängden från P till Q och hur lång är kordan, dvs. linjesegmentet mellan P och Q. **(3)**

c) Betrakta en triangel med hörn A, B och C med tillhörande vinklar α, β och γ. Låt c vara sidolängden mellan hörnen A och B. Vinkeln β är större än 90 grader, och vi skriver $\beta = 180 - \delta$, för något $0 < \delta < 90$. Uttryck höjden h från hörnet C ned till linjen som går mellan A och B, med hjälp av α, δ och c. **(3)**

Lösningsförslag

a) Sidolängderna i triangeln är $a = 4, b = 5$ och $c = 6$, och de respektive motstående sidorna är α, β och γ. Vinklarna α, β och γ är alla mindre än $90°$, och vi kan använda Cosinussatsen för att bestämma $\cos$ av dessa vinklar. Cosinussatsen ger att

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Detta ger

$$\cos(\alpha) = \frac{25 + 36 - 16}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{3}{4}, \quad \cos(\beta) = \frac{36 + 16 - 25}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{9}{16}, \quad \cos(\gamma) = \frac{25 + 16 - 36}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{8}.$$

b) Cirkelomkretsen ges av $2\pi r$, vilket betyder att båglängden mellan P och Q blir $\alpha r = r\pi/5$.Triangeln OPQ där O är cirkelens centrum är en triangel där sidorna OP och OQ har längd 5. Vinkeln β i hörnet P är lika med vinklen i hörnet Q, och vi har att $2\beta + \pi/5 = \pi$. Detta ger att $\beta = \frac{2}{5}\pi$. Om kordans längd är l har vi av Sinussatsen att

$$\frac{5}{\sin(\frac{2}{5}\pi)} = \frac{l}{\sin(\frac{1}{5}\pi)}.$$

Med andra ord att

$$l = \frac{5\sin(\frac{1}{5}\pi)}{\sin(\frac{2}{5}\pi)}.$$

c) Låt triangeln ABC ha sidolängderna a, b och c. Vi har att vinkeln $\gamma = 180 - \alpha - \beta$, och att $\beta = 180 - \delta$. Detta ger att $\gamma = \delta - \alpha$. Sinussatsen ger att

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}.$$

Mao. att $a = c\sin(\alpha)/\sin(\gamma)$. Om höjden är h har vi att

$$\frac{h}{a} = \sin(\delta).$$

Detta ger

$$h = a\sin(\delta) = c \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\delta - \alpha)} \cdot \sin(\delta).$$

Alternativt: Betrakta den rätvinkliga triangel T vars hypotenus är sida BC, och där ena katetet är höjden h. Låt x vara längden till det andra katet i T. Den rätvinkliga triangeln T med hypotenus $a = |BC|$ ger

$$\frac{h}{x} = \tan\delta.$$

Då $0 < \delta < 90$ har vi att $\tan\delta \neq 0$ och vi får att

$$x = h/\tan(\delta) = h\frac{\cos(\delta)}{\sin(\delta)}.$$

Vi har en annan rätvinklig triangel T' med katet h, men där hypotenusan är sidan AC. Hypotenusan har längd $b = |AC|$, och det andra katetet har längd $c + x$. Detta ger

$$h = (c + x)\tan(\alpha) = c\tan(\alpha) + x\tan(\alpha).$$

Insätter vi nu uttrycket för x, får vi att

$$h = c\tan(\alpha) + h\frac{\tan(\alpha)}{\tan(\delta)}.$$

Med andra ord har vi

$$c\tan(\alpha) = h\big(1 - \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\delta)}\big) = \frac{h}{\tan(\delta)}(\tan(\delta) - \tan(\alpha)).$$

Då $0 < \alpha < \delta < 90$ är $\tan(\delta) \neq \tan(\alpha)$, vilket ger att

$$h = c\frac{\tan(\alpha)\tan(\delta)}{\tan(\delta) - \tan(\alpha)}.$$

Svar:

a) Svar $\cos(\alpha) = \frac{3}{4}, \quad \cos(\beta) = \frac{9}{16}, \quad \cos(\gamma) = \frac{1}{8}$.

b) Svar $r\pi/5$ (båglängd) och $5\sin(\pi/5)/\sin(2\pi/5)$ (korda).

c) Svar $h = c\frac{\sin(\alpha)\sin(\delta)}{\sin(\delta-\alpha)}$ eller $h = c\frac{\tan\alpha\tan(\delta)}{\tan\delta - \tan\alpha}$.

Bedömningskriterier

a)
- Korrekt formulering av Cosinussats, **1 poäng**.
- Korrekt användning av Cosinussats på alla hörn **2 poäng**.

b)
- Korrekt båglängd, **1 poäng**.
- Korrekt kordlängd, **2 poäng**.

c)
- Korrekta ekvationer med tvä okända, **1 poäng**.
- Korrekt använding av sinusfunktionen, **1 poäng**.
- Korrekt formel, **1 poäng**.

c)'
- Korrekta ekvationer med två okända, **1 poäng**.
- Motivering/påpekande att nämnare ej lika med noll, **1 poäng**.
- Korrekt formel, **1 poäng**

Bedömning av presentationen

Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

0p Lösningen saknar helt förklarande text eller figur, eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.

1p Lösningen har dåligt med förklarande text och figur, eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.

2p Lösningen har förklarande text och/eller figur till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.

3p Lösningen har bra förklarande text och/eller figur till alla formler och beräkningar.

Egenbedömning

Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömninngskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

Slutgranskning

Skrivningarna slutgranskas och poängsätts av examinator.