

**SF1658 Trigonometri och funktioner**  
**Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning, 2008**

**Uppgift**

a) Bestäm alla komplexa tal  $z$  sådan att  $z^5 = 32$ . (3)

b) För positiva heltal  $n$  och positiva tal  $p$  betecknar vi den  $n$ 'te roten till  $p$  med  $\sqrt[n]{p}$ . Skriv talet

$$(1+i)(\sqrt[2]{2} + i\sqrt[2]{2})^2(\sqrt[3]{3} + i\sqrt[3]{3})^3(\sqrt[4]{4} + i\sqrt[4]{4})^4(\sqrt[5]{5} + i\sqrt[5]{5})^5(\sqrt[6]{6} + i\sqrt[6]{6})^6(\sqrt[7]{7} + i\sqrt[7]{7})^7$$

på formen  $a + bi$ . (4)

c) Använd exponentiallagarna för att visa likheten

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x).$$

(Här är  $a$  och  $x$  positiva tal, med  $a \neq 1$ .) (2)

**Lösningsförslag**

a) På polärform har vi  $32 = (32, 0)$ , och de komplexa talen  $z = (r, \theta)$  måste satisfiera (A1)

$$r^5 = 32 \quad \text{och} \quad 5\theta = 2\pi k,$$

med heltal  $k$ . Detta ger att  $r = 2$  och att (A2)

$$\theta = 2\pi k/5.$$

Lösningarna blir de fem talen  $(r, \theta_k)$ , där

$$\theta_k = 2\pi k/5, \quad k = 0, \dots, 4.$$

b) Vi noterar att  $(\sqrt[n]{n} + i\sqrt[n]{n}) = \sqrt[n]{n}(1+i)$ . Detta ger att

$$(\sqrt[n]{n} + i\sqrt[n]{n})^n = n(1+i)^n.$$

På polärform är  $(1+i) = (\sqrt{2}, \pi/4)$ , och vi har att

$$(\sqrt[n]{n} + i\sqrt[n]{n})^n = (n\sqrt{2}^n, n\pi/4).$$

Vi har att  $1 + 2 + \dots + 7 = 28$ , och att  $28\pi/4 = 6\pi + \pi$ . Av detta får vi att produkten i uppgiften blir i polärform

$$(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \sqrt{2}^{28}, \pi).$$

Talet  $\sqrt{2}^{28} = 2^{14}$  och vi har att produkten blir talet

$$-2^{18} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

c) Låt  $b = \log_a(x)$ . Av exponentiallagarna har vi att

$$a^{by} = (a^b)^y.$$

Vi har att  $b = \log_a(x)$  vilket betyder att  $a^b = x$ . Insatt i uttrycket ovan ger att  $a^{by} = x^y$ . Detta betyder, per definition, att talet  $by = \log_a(x^y)$ . Vi har nu visat att

$$\log_a(x^y) = by = \log_a(x)y.$$

**Svar:**

a)  $r = 2, \theta = 2\pi k/5$ , där  $k = 0, \dots, 4$ .

b)  $-2^{18} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ .

## Bedömningskriterier

- a) – Korrekta polära ekvationer, se (A1) **1 poäng**.
  - Hittat vinklar, se (A2) **1 poäng**.
  - Korrekt svar till uppgift **1 poäng**.
- b) – Rätt polärform till varje faktor  $(\sqrt[n]{n} + i\sqrt[n]{n})$  **1 poäng**.
  - Rätt polärform till varje potens  $(\sqrt[n]{n} + i\sqrt[n]{n})^n$  **1 poäng**.
  - Korrekt svar **2 poäng**.

## Bedömning av presentationen

Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

- 0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller figur, eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.
- 1p** Lösningen har dåligt med förklarande text och figur, eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
- 2p** Lösningen har förklarande text och/eller figur till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text. Eventuellt, lösningen har i tillägg till förklarande text, irrelevant text och irrelevanta beräkningar.
- 3p** Lösningen har bra förklarande text och/eller figur till alla formler och beräkningar.

## Egenbedömning

Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömningskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

## Slutgranskning

Skrivningarna slutgranskas och poängsätts av examinator.