KTH Matematik

SF1658 Trigonometri och funktioner
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning, 2008

Uppgift

a) Derivera funktionen $f(x) = \mathrm{e}^{x^2 \sin(x)}$. **(3)**

b) Bestäm maximum och minimum för funktionen

$$g(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$$

på intervallet $0 \leq x \leq 2$. **(3)**

c) Använd definitionen av derivata för att bestämma derivatan till $f(x) = 1/x^2$. **(3)**

Lösningsförslag

a) Låt $g(x) = x^2 \sin(x)$. Kedjeregeln gir att derivatan till $\mathrm{e}^{g(x)}$ blir

$$\frac{d}{dx}\mathrm{e}^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)} g'(x).$$

Vi använder produktregeln för att derivera $g(x)$,

$$\frac{d}{dx} g(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x).$$

Derivatan av funktionen $\mathrm{e}^{x^2 \sin(x)}$ blir

$$\mathrm{e}^{x^2 \sin(x)}\big(2x\sin(x) + x^2\cos(x)\big).$$

b) Vi deriverar $g(x)$ och finner att

$$g'(x) = \frac{2x}{(x+1)} - \frac{(x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+1)-(x^2+1)}{(x+1)^2}.$$

Nollställen till $g'(x) = 0$ bestäms av ekvationen

$$0 = 2x(x+1) - (x^2+1) = x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 2.$$

Detta ger att $x = \pm\sqrt{2} - 1$, och enbart $x = \sqrt{2} - 1$ ligger i intervallet $[0, 2]$. Detta ger tre kandidater till extremvärden, nämligen $x = 0$, $\sqrt{2} - 1$ och $x = 2$. Vi har $g(0) = 1, g(2) = \frac{5}{3}$. Slutligen har vi att

$$f(\sqrt{2}-1) = \frac{(2-2\sqrt{2}+1)+1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2}-1),$$

vilket är ett tal mindra än 1, och därför ett minimum. Maximum blir 5/3.

c) Vi skriver om uttrycket $f(x+h) - f(x)$ som

$$\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - (x+h)^2}{x^2(x+h)^2} = \frac{-2xh - h^2}{x^2(x+h)^2}$$

Detta ger att

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-2xh}{x^2(x+h)^2 h} - \frac{h^2}{x^2(x+h)^2 h} = \frac{-2}{x(x+h)^2} - \frac{h}{x^2(x+h)^2}.$$

Gränsvärdet, när h går mot noll kan nu bestämmas. Nämnaren $x(x+h)^2$ går mot x^3 när h går mot noll, oberoende av om h är negativ eller positiv, och nämnaren $x^2(x+h)^2$ går mot x^4. Detta ger att

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2}{x(x+h)^2} - \lim_{h\to 0} \frac{h}{x^2(x+h)^2} = \frac{-2}{x^3} + \frac{0}{x^4}.$$

Svar:

a) $e^{x^2 \sin(x)}\big(2x\sin(x) + x^2\cos(x)\big)$

b) Maximumvärdet är 5/3, minimum är $2(\sqrt{2} - 1)$.

c) -

Bedömningskriterier

a)
- Visar hur kedjeregeln används **1 poäng**.
- Visar hur produktregeln används **1 poäng**.
- Korrekt utförd **1 poäng**.

b)
- Korrekt deriverad **1 poäng**.
- Kollar ändpunkterna **1 poäng**.
- Korrekt svar **1 poäng**.

c)
- Korrekt definition **1 poäng**.
- Korrekt härledning **2 poäng**.

Bedömning av presentationen

Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

0p Lösningen saknar helt förklarande text eller figur, eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.

1p Lösningen har dåligt med förklarande text och figur, eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.

2p Lösningen har förklarande text och/eller figur till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text. Eventuellt, lösningen har i tillägg till förklarande text, irrelevant text och irrelevanta beräkningar.

3p Lösningen har bra förklarande text och/eller figur till alla formler och beräkningar.

Egenbedömning

Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömninngskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

Slutgranskning

Skrivningarna slutgranskas och poängsätts av examinator.