KTH Matematik

SF1658 Trigonometri och funktioner
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning, 2008

Uppgift

a) Funktionsgrafen till $f(x) = x^2 + 2x$ och linjen $y = 2x + 3$avgränsar ett område i planet. Bestäm arean till detta området. **(3)**

b) Bestäm integralen

$$\int_0^\pi x^2 \sin(x)\mathrm{d}x.$$

(3)

c) Funktionen $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ är avtagande för positiva x. Låt $A\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ vara funktionen som skickar ett positivt tal $t \geq 0$ till arean under funktionsgrafen till f över intervallet $[0, t]$. Bestäm, utan att använda Fundamentalsatsen, derivatan $A'(t)$. **(3)**

Lösningsförslag

a) Vi bestämmer först skärningen mellan linjen och parabeln. Detta ger ekvationen

$$2x + 3 = x^2 + 2x,$$

som har lösning $x = \pm\sqrt{3}$. Arean av området blir ges av integralen

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (2x + 3) - (x^2 + 2x)\mathrm{d}x.$$

Vi har

$$\int (2x + 3) - (x^2 + 2x)\mathrm{d}x = \int 3 - x^2\mathrm{d}x = 3x - \frac{1}{3}x^3 + c,$$

där c är någon konstant. Vi insätter integrationsvärderna och får

$$[3x - \frac{1}{3}x^3]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3} - \frac{2}{3}3^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{3}(3 - \frac{1}{3}3) = 4\sqrt{3}.$$

b) Partiell integration ger

$$\int x^2 \sin(x)\mathrm{d}x = [-x^2\cos(x)] + \int 2x\cos(x)\mathrm{d}x.$$

Partiell integration igen ger

$$\int 2x\cos(x)\mathrm{d}x = [2x\sin(x)] - \int 2\sin(x)\mathrm{d}x.$$

Detta ger att

$$\int_0^\pi x^2\sin(x)\mathrm{d}x = [-x^2\cos(x)]_0^\pi + [2x\sin(x)]_0^\pi + [2\cos(x)]_0^\pi = -\pi^2(-1)+2\pi\cdot 0+2(-1)-0-0-2 = \pi^2-4.$$

c) Vi vill bestämma derivatan till $A(x)$. Då funktionsgrafen till f är avtagande har vi, för $h > 0$ att

$$f(t)h \leq A(t+h) - A(t) \leq f(t+h)h.$$

Detta ger att

$$f(t) \leq \frac{A(t+h) - A(t)}{h} \leq f(t+h)$$

for alla $h > 0$. När $h \to 0$ vill $f(t+h) \to f(t)$. Tillfället med negativa $h < 0$ ger på liknande sett den omvända olikheten. Detta betyder att derivatan till $A(t)$ i punkten t, ges av

$$\lim_{h\to 0}\frac{A(t+h) - A(t)}{h} = f(t).$$

Svar:

a) Arean är $4\sqrt{3}$.

b) Integralen blir $\pi^2 - 4$.

c) Derivatan $A'(t) = f(t)$.

Bedömningskriterier

a)
- Rätt funktion att integrera **1 poäng**.
- Bestämd rätt intervall att integrera **1 poäng**
- Korrekt svar till uppgift **1 poäng**.

b)
- Korrekt användning av partiell integration **1 poäng**.
- Hittat svar **2 poäng**.

c)
- -

Bedömning av presentationen

Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

0p Lösningen saknar helt förklarande text eller figur, eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.

1p Lösningen har dåligt med förklarande text och figur, eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.

2p Lösningen har förklarande text och/eller figur till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text. Eventuellt, lösningen har i tillägg till förklarande text, irrelevant text och irrelevanta beräkningar.

3p Lösningen har bra förklarande text och/eller figur till alla formler och beräkningar.

Egenbedömning

Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömninngskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

Slutgranskning

Skrivningarna slutgranskas och poängsätts av examinator.