KTH Matematik

SF1658 Trigonometri och funktioner
Lösningsförslag till tentamen
den 20 oktober 2008

1. a) Linjerna $y = x$ och $x = \sqrt{3}y$, samt cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 9$ avgränsar en cirkelsektor i första kvadrant. Bestäm öppningsvinkel, area och båglängd för cirkelsektoren.

(4)

b) Visa areasatsen för det fall då den ingående vinkeln är spetsig. **(5)**

Lösning: a) Linjen $y = x$ bildar $\pi/4$ radianer med x-axeln, och linjen $x = \sqrt{3}y$ bildar $\pi/6$ radianer med x-axeln. Cirkelsektoren har då öppningsvinkel $\pi/12$ radianer (15 grader). Radien är 3, och båglängden blir

$$2\pi \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{2\pi \cdot 12} = \frac{\pi}{4}.$$

Arean till cirkelsektoren blir

$$\frac{\pi}{2\pi 12}\pi r^2 = \frac{3}{8}\pi.$$

b) Låt α vara den ingående spetsiga vinkeln, och låt de tillhörande sidorna vara av längd b och c. Vi låter γ vara vinkeln motstående till sida av längd c, och vi kan antaga att γ också är spetsig. Vi fäller ned höjden från vinkel β ned på sida av längd b. Låt h vara höjden. Då γ är spetsig skär höjden sida b. Låt avständet från skärningen mellan höjden och hörnet α vara av längd $b - x$. Vi har då att aren till triangeln är

$$A = \frac{1}{2}(b - x) \cdot h + \frac{1}{2}xh = \frac{1}{2}bh.$$

Av definitionen av sinus har vi att $h/c = \sin(\alpha)$ vilket ger

$$A = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha).$$

Svar:

a) Vinkel $\pi/12$, båglängd $\pi/4$ och area $3\pi/8$.

b) -

2. a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen **(4)**

$$\cos(3x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) I en triangel är cosinus av två vinklar 1/3 och 1/4, respektivt. Använd additionsformeln för cosinus för att bestämma cosinus av den tredje vinkeln. **(3)**

c) Bestäm, exakt, **(2)**

$$\sin(\frac{\pi}{12}).$$

Lösning: a) Ekvationen $\cos(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ har lösningarna

$$t = \frac{3}{4}\pi + 2\pi n \quad \text{och} \quad t = \frac{5}{4}\pi + 2\pi n,$$

för heltal n. Detta ger att ekvationen $\cos(3x - \pi/4) = -1/\sqrt{2}$ har lösningar

$$3x = \frac{1}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi + 2\pi n \quad \text{och} \quad 3x = \frac{6}{4}\pi + 2\pi n,$$

vilket ger

$$x = \frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi n \quad \text{och} \quad x = \frac{1}{2}\pi + \frac{2}{3}\pi n.$$

b) Vi har $\cos(\alpha) = 1/3$ och $\cos(\beta) = 1/4$, och söker $\cos(\gamma)$. Trigonometriska ettan ger

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}, \quad \sin(\beta) = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Vi har att $\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$, och att $\cos(180 + t) = -\cos(t)$. Detta ger

$$\cos(\gamma) = -(\cos(-(\alpha + \beta)) = -\cos(\alpha + \beta).$$

Additionssatsen för cosinus ger

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{3}\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\sqrt{8}\sqrt{15}.$$

Detta ger att $\cos(\gamma) = \frac{1}{12}(\sqrt{8}\sqrt{15} - 1)$.

c) Vi skriver $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$. Additionssats för sinus ger

$$\sin(\frac{\pi}{12}) = \sin(\pi/3)\cos(-\pi/4) + \sin(-\pi/4)\cos(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1).$$

Svar:

a) $x = \frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi n \quad \text{och} \quad x = \frac{1}{2}\pi + \frac{2}{3}\pi n$, heltal n.

b) $\cos(\gamma) = \frac{1}{12}(\sqrt{8}\sqrt{15} - 1)$.

c) Sinus av $\pi/12$ är $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$.

3. a) Skriv på form $a + bi$ när

$$i) \quad z = (3+2i)^3 \cdot \overline{(3+2i)}^3 \qquad ii) \quad z = \frac{1}{2+5i}, \qquad iii) \quad (3, \pi/5),$$

där talet i uppgift iii) ges i polära koordinater. **(3)**

b) Bestäm alla lösningar till ekvationen $z^5 = 4 - 4i$. Det är tillåtet att använda trigonometriska funktioner i svaret. **(3)**

c) Skriv på form $a + bi$, talet **(3)**

$$(2+4i)^{-1}(4+8i)^2(6+12i)^3(8+16i)^{-4}.$$

Lösning: a) Vi har att $(3+2i) \cdot (3-2i) = 13$ slik att

$$(3+2i)^3\overline{(3+2i)}^3 = 13^3.$$

Och vi har att

$$\frac{1}{2+5i} = \frac{2-5i}{2^2+5^2} = \frac{1}{29}(2-5i).$$

Slutligen har vi att

$$(3, \pi/5) = 3\cos(\pi/5) + i3\sin(\pi/5).$$

b) Talet $4 - 4i$ blir i polära koordinater $(\sqrt{32}, -\pi/4)$. Ekvationen $z^5 = 4 - 4i$ har lösningarna, i polära koordinater, $r = 32^{1/10} = \sqrt{2}$, och

$$5\theta = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n,$$

heltal n. Detta ger att

$$\theta = -\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5},$$

med $n = 0, \ldots, 4$.

c) Låt $z = 1 + 2i$. Vi har att

$$(2+4i) = 2z, \quad (4+8i) = 4z, \quad (6+12i) = 6z, \quad (8+16i) = 8z,$$

vilket betyder att produkten i uppgiften är

$$(2z)^{-1}(4z)^2(6z)^3(8z)^{-4} = \frac{4^2 \cdot 6^3 \cdot z^5}{2 \cdot 8^4 \cdot z^5} = \frac{3^3}{2^6}.$$

Svar:

a) Svar $i) = 13^3$, $\quad ii) = \frac{2}{29} - \frac{5}{29}i$, $\quad iii) = 3\cos(\pi/5) + 3\sin(\pi/5)i$.

b) Svar $z = (\sqrt{2}, -\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}$, var $n = 0, \ldots, 4$.

c) Svar $\frac{27}{64}$.

4. a) Bestäm derivatan till **(3)**

$$\frac{\sin(x)}{e^{-x^2+2x}}.$$

b) Använd definitionen, och lämplig figur, för att bestämma derivatan av $\sin(\theta)$ i $\theta = 0$, där θ mäts i grader, ej radianer. **(3)**

c) Som i uppgiften innan mäter vi vinklarna i grader, och ej radianer. Bestäm derivatan till $\sin(\theta)$ i en godtycklig vinkel θ. **(3)**

Lösning: a) Vi har att $f(x) = \sin(x)e^{x^2-2x}$. Produktregeln och kedjeregeln ger att

$$f'(x) = \cos(x)e^{x^2-2x} + \sin(x)e^{x^2-2x}(2x-2).$$

b) Vi ritar upp en rätvinklig triangel med vinkel θ och hypotenusa av längd 1. Cirkelsektorn med vinkel θ och radie 1 har area

$$A = \pi r^2 \cdot \frac{\theta}{360} = \frac{\theta \cdot \pi}{2 \cdot 180}.$$

Denna cirkelsektor har större area än triangeln vi precis ritade upp, men mindre area än den rätvinkliga triangeln med vinkel θ och där tillhörande katet har längd 1. Areorna ger olikheterna

$$\frac{1}{2}\tan(\theta) \geq \frac{\theta\pi}{2 \cdot 180} \geq \frac{1}{2}\sin(\theta)\cos(\theta),$$

för alla $\theta \geq 0$. Den första olikheten skriver vi som

$$\frac{\sin(\theta)}{\theta} \geq \frac{\cos(\theta)\pi}{180}.$$

Den andra olikheten skriver vi som

$$\frac{\pi}{180\cos(\theta)} \geq \frac{\sin(\theta)}{\theta}.$$

Vi har att

$$\frac{\pi}{180\cos(\theta)} \geq \frac{\sin(\theta)}{\theta} \geq \cos(\theta)\frac{\pi}{180},$$

för alla $\theta \geq 0$. Vi har att $\cos(0) = 1$, och detta ger att

$$\sin'(0) = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta) - \sin(0)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = \frac{\pi}{180}.$$

c) Vi vill beräkna

$$\sin'(\theta) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(\theta + h) - \sin(\theta)}{h}.$$

Vi har från uppgiften innan $\sin'(0)$, och vi har att $\cos'(0) = 0$ då cosinusfunktionen når sitt maximum i $\theta = 0$. Additionsformlen ger att

$$\sin(\theta + h) - \sin(\theta) = \sin(\theta)\cos(h) + \sin(h)\cos(\theta) - \sin(\theta).$$

Detta ger att

$$\sin'(\theta) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(\theta)(\cos(h) - 1)}{h} + \frac{\sin(h)\cos(\theta)}{h} = \sin(\theta)\cdot 0 + \frac{\pi}{180}\cos(\theta).$$

Svar:

a) $e^{x^2-2x}(\cos(x) + 2x\sin(x) - 2\sin(x))$.

b) $\sin'(0) = \pi/180$.

c) $\sin'(\theta) = \pi/180\cos(\theta)$.

5. a) Bestäm arean *mellan* funktionsgrafen till funktionen $\sin(2x - 1)$ och x-axeln över intervallet $[0, \pi]$. **(4)**

b) Hitta en primitiv funktion till $e^{2x}\cos(x)$. **(3)**

c) Bestäm volymen till rotationskroppen vi får vid att rotera funktionsgrafen till $f(x) = 1/x$ över intervallet $[1, R]$, för godtycklig $R \geq 1$. **(2)**

Lösning: a) Funktionen $\sin(2x - 1)$ har period π, vilket betyder att $\int_0^\pi \sin(2x - 1)dx = 0$. Vi har vidare att funktionen är noll i punkten $x = 1/2$. Arean mellan funktionsgrafen och x-axeln ges som det dubbla värdet till integralen

$$\int_{1/2}^{\pi/2+1/2} \sin(2x-1)dx = \frac{-1}{2}[\cos(2x-1)]_{1/2}^{\pi/2+1/2} = -\frac{1}{2}(\cos(\pi+1-1)-\cos(1-1)) = 1.$$

b) Vi använder oss av partiell integration och får att

$$\int e^{2x}\cos(x)dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos(x) + \int \frac{1}{2}e^{2x}\sin(x).$$

Ytterligare partiell integrering ger

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos(x) = \frac{1}{4}e^{2x}\sin(x) - \int \frac{1}{4}e^{2x}\cos(x)dx.$$

Med andra ord har vi att

$$\frac{5}{4}\int e^{2x}\cos(x)dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos(x) + \frac{1}{4}e^{ex}\sin(x).$$

c)Vi söker integralen

$$\int_1^R \pi(\frac{1}{x})^2 dx = \int_1^R \frac{\pi}{x^2} dx = [\frac{-\pi}{x}]_1^R = \pi(1 - 1/R).$$

Svar:

a) Arean är 2.

b) En primitiv funktion är $\frac{2}{5}e^{2x}\cos(x) + \frac{1}{5}e^{2x}\sin(x)$.

c) Svar $\pi(R-1)/R$.