KTH Teknikvetenskap

SF2703 ALGEBRA GRUNDKURS
ANTECKNINGAR
2009-01-20

1. Permutationer

För varje mängd X kan vi bilda gruppen S_X av bijektiva funktioner $f : X \longrightarrow X$. Om X är en ändlig mängd med n element kan vi numrera elementen i X och se att vi lika gärna kan använda den symmetriska gruppen S_n som permuterar elementen $\{1, 2, \ldots, n\}$.

2. Matrisgrupper

De inverterbara kvadratiska matriserna av storlek $n \times n$ med reella koefficienter bildar en grupp som kallas den *generella linjära gruppen* och betecknas $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$. I den generella linjära gruppen finns många andra grupper av matriser. Varje delmängd i $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ som är sluten under multiplikation och invers bildar också en grupp. Exempelvis finns den *ortogonala gruppen* som består av ortogonala matriser och den *speciella linjära gruppen* som består av matriser med determinant ett. Vi kan på samma sätt se på matrisgrupper med komplexa koefficienter.

3. Kvaterniongruppen

Vi har en grupp med åtta element $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ där 1 är en enhet och

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \quad ji = -k, \quad jk = i, \quad kj = -i, \quad ki = j, \quad ik = -j,$$

$$(-1)i = i(-1) = -i, \quad (-1)k = j(-1) = -j, \quad (-1)l = k(-1) = -k.$$

För att kontrollera att det är en grupp räcker det att se att multiplikationen är associativ, eftersom det är klart att det finns en enhet och att alla element är inverterbara. Vi kan också representera kvaterniongruppen som en matrisgrupp genom att välja ut matriserna

$$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pm\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \pm\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad \pm\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

i $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$.

4. Homomorfier och isomorfier

De funktioner mellan grupper som respekterar gruppoperationerna kallas *homomorfier*. För en grupphomorfi $\Phi : G \longrightarrow H$ har vi alltså att

$$\Phi(a * b) = \Phi(a) * \Phi(b)$$

för alla a och b i G. Observera att det till vänster är gruppoperationen i G och till höger är gruppoperationen i H. Till exempel har vi enligt logaritmlagarna att

$$\ln : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

är en grupphomomorfi där gruppoperationen i $\mathbb{R}^+$ är multiplikation och gruppoperationen i $\mathbb{R}$ är addition.

Vi kan använda exponentialfunktionen för att få en grupphomomorfi

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$$

Determinanten ger en homomorfi från den generella linjära gruppen till koefficientkroppen, tex

$$\det : \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Vi kan också få en homomorfi från reella talen till den generella linjära gruppen

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$$

genom

$$\exp(t) = \exp(tA) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i A^i}{i!}.$$

Om en grupphomomorfi dessutom är *bijektiv*, dvs inverterbar, kallas den för en *isomorfi*. Vi ser till exemepel att $\ln$ är en isomorfi mellan $\mathbb{R}$ och $\mathbb{R}^+$.

Ett annat exempel är när vi ser på symmetrierna av en tetraeder som ger en homomorfi från symmetrigruppen av tetraedern till symmetriska gruppen S_4 genom att se på hur sidorna permuteras.

För varje element a i en grupp kan vi bilda en *automorfi*, dvs en isomorfi mellan gruppen och sig själv, genom

$$b \mapsto a * b * a^{-1},$$

för alla b i G. Det är något vi känner igen från linjär algebra när vi byter bas.

Till varje homomorfi $\Phi : G \longrightarrow H$ kan vi definera *kärnan*, $\ker \Phi$, som de element i G som går på enhetselementet i H. Vi får då en grupp som ligger i G genom att $\ker \Phi$ innehåller enhetselementet i G och $\ker \Phi$ är sluten under multiplikation och invers.

Sats 4.1. *En homomorfi $\Phi : G \longrightarrow H$ är injektiv om och endast om kärnan är trivial.*

Bevis. Om Φ är injektiv är det bara enhetselementet i G som går på enhetselementet i H. Om nu kärnan är trivial har vi att

$$\Phi(g) = \Phi(h) \iff \Phi(g^{-1}h) \in \ker \Phi \iff g^{-1}h = e \iff g = h.$$

□

5. GRUPPVERKAN

Om vi har en grupp G och en mängd X säger vi att G *verkar* på X om det finns en funktion

$$G \times X \longrightarrow X$$

som vi kan skriva $(g, x) \mapsto g.x$ och som uppfyller:

i) $e.x = x$, för alla x i X,
ii) $(a * b).x = a.(b.x)$ för alla a, b i G och alla x i X.

Om vi ser på matrisgruppen Gl_n av inverterbara $n \times n$-matriser verkar den på ett naturligt sätt på ett n-dimensionellt vektorrum av kolonnmatriser genom matrismultiplikation.

Symmetriska gruppen verkar per definition på mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$ men den kan också verka på mängden av polynom i flera variabler $x_1, x_2, \ldots, x_n$ genom permutation av variablerna.

Symmetrigrupperna för de platonska kropparna verkar på mängden av hörn, mängden av kanter och mängden av sidor.

Vi kan också se en gruppverkan som en homomorfi från G till gruppen S_X av bijektiva funktioner på X,

$$\Phi : G \longrightarrow S_X$$

med $\Phi(g)(x) = g.x$ för g i G och x i X.

Vi säger att verkan är *trogen* om olika element i gruppen ger olika bijektiva funktioner på X, vilket är detsamma som att säga att homomorfin från gruppen till gruppen av bijektiva funktioner på X är injektiv.

Symmetriska gruppen S_n verkar på Van der Monde-determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i \le j \le n} (x_j - x_i)$$

genom permutation av variablerna. Vi ser att resultatet alltid blir samma sak så när som på tecknet, vilket visar att vi har en homomorfi från symmetriska gruppen till gruppen av inverterbara heltal under multiplikation, dvs

$$\mathrm{sgn} : S_n \longrightarrow \mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}.$$

Exempel 5.1. Om vi låter G vara symmetrierna av en kub vet vi att den har 24 element på grund av att varje sida kan gå på sex olika sidor och i varje sådant fall orienteras på fyra olika sätt. Vi har att G verkar på

- de sex sidorna
- de tolv kanterna
- de åtta hörnen
- de fyra diagonalerna

Därmed får vi homomorfier

$$G \longrightarrow S_6, \quad G \longrightarrow S_{12}, \quad G \longrightarrow S_8, \quad G \longrightarrow S_4.$$

I det sista fallet har vi lika många element i de två grupperna och vi kan faktiskt visa att denna homomorfi är en isomorfi genom att visa att den är injektiv. Det kan vi enligt Sats 4.1 ovan göra genom att visa att kärnan är trivial, dvs att det bara är identitetssymmetrin som inte alls permuterar diagonalerna.

Övningar

Övning 5.1. *Låt G vara symmetrigruppen av en tetraeder. Visa att G är isomorf med den alternerande gruppen*

$$A_4 = \ker(\mathrm{sgn} : S_4 \to \{\pm 1\}).$$

Övning 5.2. *Visa att den generella linjära gruppen, $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, verkar på mängden av reella $n \times n$-matriser genom*

$$(A, B) \mapsto ABA^{-1}.$$

Rekommenderade uppgifter

1.3 Symmetriska gruppen. 4, 5, 6, 10, 13, 14, 15, 16, 20

1.4 Matrisgrupper. 7, 10, 11

1.5 Kvaterniongruppen. 3

1.6 Homomorfier och isomorfier. 1, 2, 4, 5, 6, 7, 13, 14, 18, 19, 20, 25, 26

1.7 Gruppverkan. 4, 6, 8, 12, 17, 18, 20, 22, 23
