KTH Teknikvetenskap

SF2703 ALGEBRA GRUNDKURS
ANTECKNINGAR
2009-01-23

1. Delgrupper som genereras av en delmängd

Definition 1.1. En icke-tom delmängd $A \subseteq G$ av en grupp *genererar* en delgrupp $\langle A \rangle$ som är den minsta delgrupp som innehåller A, dvs

$$\langle A \rangle = \bigcap_{\substack{H \subseteq A \\ H \leq G}} H$$

Sats 1.1. $\langle A \rangle = \{a_1 a_2 \cdots a_n | a_i \in A \cup A^{-1}, n \in \mathbb{N}\}$.

Bevis. Det är klart att alla element som ligger i mängden till höger måste vara med i varje delgrupp H som innehåller A eftersom en delgrupp är sluten under invers och produkt.

Det återstår att visa att högerledet, $\bar{A}$, är en delgrupp. För att göra det tar vi två element $g = a_1 a_2 \cdots a_m$ och $h = b_1 b_2 \cdots b_n$ där alla a_i och b_i ligger i $A \cup A^{-1}$. Det betyder att också alla b_i^{-1} ligger i $A \cup A^{-1}$ och vi ser därför att

$$gh^{-1} = a_1 a_2 \cdots a_m b_n^{-1} b_{n-1}^{-1} \cdots b_1^{-1}$$

också ligger i $\bar{A}$. Alltså är $\bar{A}$ en delgrupp och eftersom den är innehållen i alla delgrupper som innehåller A måste den vara den minsta delgrupp som innehåller A, dvs $\bar{A} = \langle A \rangle$. $\square$

2. Delgruppslattice

Om vi har två delgrupper $H_1 \leq G$ och $H_2 \leq G$ finns det två andra delgrupper som ges av H_1 och H_2. Det är dels skärningen $H_1 \cap H_2$, dels den delgrupp som genereras av unionen $H_1 \cup H_2$. Vi skriver

$$\langle H_1, H_2 \rangle = \langle H_1 \cup H_2 \rangle.$$

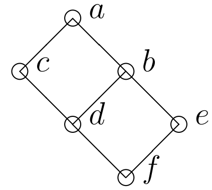
Medan snittet är den största delgrupp som ligger i både H_1 och H_2 är förenningen $\langle H_1, H_2 \rangle$ den minsta delgrupp som innehåller både H_1 och H_2.

Relationen $\leq$ som talar om att en delgrupp är en delgrupp i en annan delgrupp är en *partialordning*, dvs uppfyller

- $a \leq a$ (*reflexivitet*)
- $a \leq b$ och $b \leq c \Longrightarrow a \leq c$ (*transitivitet*)
- $a \leq b$ och $b \leq a \Longrightarrow a = b$ (*antisymmetri*)

Vi säger att mängden av delgrupper av en grupp G är en *partialordnad mängd* under $\leq$. En partialordnad mängd där det för varje par a, b finns ett minsta element som är större än både a och b och ett största element som är mindre än a och b kallas för ett *lattice* eller *gitter*.

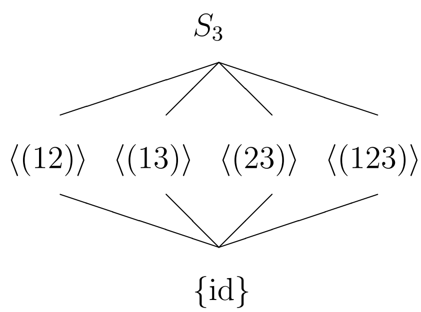
Grafiskt kan vi åskådliggöra ett ändligt lattice genom att rita en hörn för varje element och en kant för varje minimal relation $a \leq b$, där det större elementet ligger högre upp än det mindre.



Exempel 2.1. Om $G = S_3$ har vi fem delgrupper

$$\{\mathrm{id}\}, \quad \langle(12)\rangle, \quad \langle(13)\rangle, \quad \langle(23)\rangle, \quad \langle(123)\rangle \quad \text{och} \quad S_3.$$

Ingen av de fyra delgrupperna i mitten innehåller varandra, men alla innehåller den triviala delgruppen $\{\mathrm{id}\}$ och alla ligger i S_3. Alltså kan vi rita upp delgruppslattice som



Exempel 2.2. För $G = C_{12} = \langle x \rangle$, en cyklisk grupp av ordning 12 har vi delgrupper av ordning $1, 2, 3, 4, 6, 12$ som ges av

$$\{\mathrm{id}\}, \quad \langle x^6 \rangle, \quad \langle x^4 \rangle, \quad \langle x^3 \rangle, \quad \langle x^2 \rangle \quad \text{och} \quad C_{12} = \langle x \rangle.$$

Rekommenderade uppgifter

2.1. **2.4 Delgrupper genererade av delmängder.** 2, 3, 8, 9, 10, 11, 13, 15, 19

2.2. **2.5 Delgruppslattice.** 1, 6, 10, 11, 14