KTH Teknikvetenskap

SF2703 ALGEBRA GRUNDKURS
ANTECKNINGAR
2009-01-27

1. Kvotgrupper och homomorfier

Om vi har en delgrupp H av en grupp G skulle det vara naturligt att bilda en kvot G/H på samma sätt som vi gjort när det gäller att räkna med heltal modulo n. Vi skulle då räkna med någon form av restklasser modulo H, och de naturliga kandidaterna till restklasser är sidoklasserna, gH, för $g \in G$.

Definition 1.1. Om H är en delgrupp i en grupp G låter vi G/H beteckna mängden av vänstersidoklasser

$$G/H = \{gH | g \in G\}$$

Vi har redan sett att sidoklasserna är disjunkta eller identiska och två element g och g' ligger i samma sidoklass precis om $g^{-1}g'$ ligger i H.

För att G/H ska kunna få en struktur av en grupp måste vi ha en gruppoperation och det naturliga skulle vara att ta två representanter i sidoklasserna som ska multipliceras och använda produkten av dessa element som definition av produkten av sidoklasserna, dvs

$$g_1Hg_2H = g_1g_2H.$$

För att detta ska kunna fungera måste resultatet vara oberoende av vilka representanter vi väljer. Det visar sig att detta är sant om vänstersidoklasserna är lika med högersidoklasserna, dvs $gH = Hg$, för alla $g \in G$, eftersom vi då får att

$$g_1Hg_2H = g_1(Hg_2)H = g_1(g_2H)H = g_1g_2H \cdot H = g_1g_2H.$$

Definition 1.2 (normal delgrupp). Om $gH = Hg$ för alla g i G säger vi att H är en *normal* delgrupp i G.

Vi kan se att detta är det samma som att normalisatorn till H är hela G, eftersom $gH = Hg$ är samma sak som $gHg^{-1} = H$.

Sats 1.1. *I en abelsk grupp är alla delgrupper normala.*

Bevis. Eftersom gruppoperationen, $+$, i en abelsk grupp är kommutativ är det klart att $g + H = H + g$. □

Sats 1.2. *Om H är en normal delgrupp i G bildar G/H en grupp under operationen $g_1H*g_2H = (g_1g_2)H$.*

Bevis. Vi har redan sett att operationen är väldefinierad när H är normal. Det återstår att visa att operationen uppfyller kraven för en gruppoperation. Operationen är associativ eftersom

$$(g_1H * g_2H) * g_3H = (g_1g_2)g_3H = g_1(g_2g_3)H = g_1H * (g_2H * g_2H)$$

eftersom operationen i G är associativ. Enheten i G/H är eH, eftersom

$$eH * gH = gH = gH * eH,$$

för alla g i G. Inversen till gH ges av $g^{-1}H$ eftersom

$$gH * g^{-1}H = (gg^{-1})H = eH = (g^{-1}g)Hg^{-1}H * gH.$$

□

Exempel 1.1. Vi kan beskriva alla ändliga cykliska grupper C_n som kvoten av $\mathbb{Z}$ med delgruppen $n\mathbb{Z}$, som är normal eftersom C_n är abelsk. Vi får

$$C_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

där vi ser på $\mathbb{Z}$ som en grupp under addition.

Sats 1.3. *Kärnan till en homomorfi är en normal delgrupp.*

Bevis. Låt $\Phi : G \longrightarrow H$ vara en homomorfi mellan två grupper. För varje element g i G och varje element $h \in \ker \Phi$ har vi

$$\Phi(ghg^{-1}) = \Phi(g)\Phi(h)\Phi(g^{-1}) = \Phi(g)e\Phi(g^{-1}) = \Phi(gg^{-1}) = \Phi(e) = e.$$

Alltså tillhör ghg^{-1} kärnan som därmed är normal. □

Exempel 1.2. Etersom $\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})$ är kärnan i homomorfin $\det : \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ är $\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})$ en normal delgrupp och vi kan bilda kvoten $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})/\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})$. Denna delgrupp är isomorf med $\mathbb{R}^*$ under multiplikation.

Exempel 1.3. Den alternerande gruppen A_n är kärnan till homomorfin $\mathrm{sgn} : S_n \longrightarrow \mathbb{Z}^*$. Kvoten S_n/A_n är isomorf med $\mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}$.

2. Mer om sidoklasser

Vi har redan sett på Lagranges sats tidigare. Om vi ser på fallet när en delgrupp är stabilsatorn för ett element under gruppverkan kan vi få ytterligare en tolkning av antalet sidoklasser.

Sats 2.1. *Om gruppen G verkar på en mängd X har vi att antalet sidoklasser till stabilsatorn G_x ges av antalet element i banan Gx. Alltså gäller att*

$$|G_x| \cdot |Gx| = |G|,$$

för alla element x i X.

Bevis. Vi skulle vilja se på antalet sidoklasser till $H = G_x$. Vi vet att två element, g och g', ligger i samma sidoklass om och endast om $g^{-1}g'$ ligger i H, men det betyder att

$$g^{-1}g'.x = x \iff g'.x = g.x.$$

Alltså får vi en bijektion mellan sidoklasserna i till $H = G_x$ och elementen i banan

$$Gx = \{g.x | g \in G\},$$

vilket bevisar satsen. □

Exempel 2.1. Om vi ska räkna antalet element i $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{F}_q)$ – den generella linjära gruppen över en kropp med q element – får vi att

$$|\mathrm{Gl}_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)|\mathrm{Gl}_n(\mathbb{F}_q)_v|$$

för varje nollskild vektor $v \in \mathbb{F}_q^n$ eftersom banan för v är $\mathbb{F}_q^n \setminus \{0\}$. Å andra sidan får vi att stabilisatorn för $v = (1, 0, \dots, 0)^T$ ges av alla matriser i $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{F}_q)$ vars första kolonn är v. Antalet element är således $q^{n-1}|\mathrm{Gl}_{n-1}(\mathbb{F}_q)|$ och med induktion får vi

$$|\mathrm{Gl}_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^{n-1} - 1)\cdots(q - 1)q^{n(n-1)/2}.$$

Exempel 2.2. Genom att se på hur symmetrigrupperna för de platonska kropparna verkar på mängden av sidor får vi antalet element för dodekaedern som

$$5 \cdot 12 = 60$$

eftersom varje sida fixeras av fem rotationer och varje sida kan skickas till var och en av de tolv sidorna. På samma sätt får vi $3 \cdot 4 = 12$ symmetrier av tetraedern, $6 \cdot 6 = 24$ symmetrier av kuben, $3 \cdot 8 = 24$ symmetrier av oktaedern och $3 \cdot 20 = 60$ symmetrier av ikosaedern.

Definition 2.1 (Transitiv gruppverkan). Vi säger att en grupp G verkar *transitivt* på en mängd X om det för varje element i X kan gå på varje annat element i X.

Sats 2.2. *Om H och K är delgrupper i G gäller att*

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}.$$

Bevis. Mängden HK kan ses som en union av sidoklasser till K. Det gäller nu bara att räkna hur många sidoklasser det är. Vi ser att H verkar transitivt på mängden av sidoklasser som ligger i HK genom multiplikation till vänster. Antalet sidoklasser kan nu fås genom $|H|/|H_x|$ där H_x är stabilisatorn för någon sidoklass. Vi kan lika gärna titta på stabilisatorn till sidoklassen $eK = K$. Ett element h i H fixerar K om och endast om $hK = K$, dvs om och endast om h ligger i K. Alltså ges stabilisatorn av $H \cap K$, och vi har att HK består av $|H|/|H \cap K|$ sidoklasser till $|K|$, vilket bevisar satsen. □

Exempel 2.3 (Uppgift 3.1.22)**.**

a) Visa att $H \cap K$ är en normal delgrupp om H och K är normala.
b) Visa skärningen av en uppsättning normala delgrupper $\{H_i\}_i \in I$ är normal.

Det räcker att se på b) eftersom a) är ett specialfall. Tag ett element h som ligger i skärningen $H = \bigcap_{i \in I} H_i$. Det betyder att h ligger i H_i för alla $i \in I$. Eftersom dessa delgrupper är normala gäller att

$$ghg^{-1} \in H_i$$

för alla g i G och alla i i I. Alltså ligger ghg^{-1} i H som därmed är normal.

Exempel 2.4. (Uppgift 3.1.34) Låt D_{2n} vara den dihedrala gruppen med generatorer r och s med relationer $r^n = s^2 = e$, $rs = sr^{-1}$. Låt k vara en delare i n.

a) Visa att $\langle r^k \rangle$ är en normal delgrupp av D_{2n},

b) Visa att $D_{2n}/\langle r^k \rangle \cong D_{2n/k}$.

Lösning: Vi kan skriva ett element i D_{2n} som $r^i s^j$, med $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ och $j \in \{1, 2\}$. För ett element, r^{mk}, i $\langle r^k \rangle$ får vi

$$r^i s^j r^{mk} (r^i s^j)^{-1} = r^i s^j r^{mk} s^{-j} r^{-i} = \begin{cases} r^i r^{mk} r^{-i} = r^{mk}, & \text{om } j = 0, \\ s r^{-i} r^{mk} r^i r^i s = r^{-mk}, & \text{om } j = 1. \end{cases}$$

I båda fallen ligger elementet kvar i $\langle r^k \rangle$, vilket visar att delgruppen är normal.

Antalet element i kvoten $D_{2n}/\langle r^k \rangle$ är $2n/k$. Om vi kan hitta en injektiv homomorfi mellan grupperna är de därmed isomorfa. Vi låter $D_{2n/k}$ vara gererad av R och S med relationerna $R^{n/k} = S^2 = e$ och $RS = SR^{-1}$. En naturlig kandidat till homomorfi ges nu av

$$R \mapsto r\langle r^k \rangle, \quad S \mapsto s\langle r^k \rangle.$$

3. Isomorfisatserna

Sats 3.1. (Första isomorfisatsen) *För en grupphomomorfi* $\Phi : G \longrightarrow H$ *gäller att*

$$G/\ker\Phi \cong \mathrm{im}\Phi.$$

Bevis. Till att börja med kan vi anta att $H = \mathrm{im}\Phi$ genom att se på sammansättningen

$$G \longrightarrow \mathrm{im}\Phi \longrightarrow H.$$

Vi har projektionen

$$G \longrightarrow G/\ker\Phi$$

och vi kan få en faktorisering av homomorfin $G \longrightarrow \mathrm{im}\Phi$ genom $G/\ker\Phi$ om vi kan få en inducerad homomorfi $\Psi : G/\ker\Phi \longrightarrow \mathrm{im}\Phi$. För att det ska stämma måste vi för ett element $g\ker\Phi$ i $G/\ker\Phi$ ta bilden av g i $\mathrm{im}\Phi$, dvs låta

$$\Psi(g\ker\Phi) = \Phi(g) \in \mathrm{im}\Phi.$$

Detta definierar en funktion från $G/\ker\Phi$ eftersom olika representanter för samma sidoklass uppfyller $g_1^{-1}g_2 \in \ker\Phi$, vilket är detsamma som att $\Phi(g_1) = \Phi(g_2)$. Vi ser att

$$\Psi(g_1\ker\Phi * g_2\ker\Phi) = \Psi(g_1g_2\ker\Phi) = \Phi(g_1g_2) = \Phi(g_1)\Phi(g_2) = \Psi(g_1\ker\Phi)\Psi(g_2\ker\Phi)$$

vilket visar att Ψ är en homomorfi.

För att visa att Ψ är en isomorfi räcker det att visa att den är surjektiv och injektiv. Att den är surjektiv är klart eftersom varje element i $\mathrm{im}\Phi$ är lika med $\Phi(g) = \Psi(g\ker\Phi)$ för något element g i G.

För att se att den är injektiv ser vi på kärnan som ges av

$$\ker\Psi = \{g\ker\Phi|\Phi(g) = e\} = \{e\ker\Phi\}$$

och eftersom kärnan bara består av enhetselementet är homomorfin injektiv. □

Definition 3.1 (fiber av homomorfi). För en homomorfi $\Phi : G \longrightarrow H$ och ett element h i H säger vi att

$$\{g \in G|\Phi(g) = h\}$$

är *fibern* av Φ över h.

Sats 3.2. *Fibrerna till en homomorfi är samma sak som sidoklasserna till kärnan.*

Bevis. Om $\Phi(g_0) = h$ har vi att

$$\{g \in G|\Phi(g) = h\} = \{g_0 g|g \in \ker\Phi\} = g_0\ker\Phi$$

eftersom

$$\Phi(g) = \Phi(g_0) \Longleftrightarrow \Phi(g_0^{-1}g) = e \Longleftrightarrow g_0^{-1}g \in \ker\Phi \Longleftrightarrow g \in g_0\ker\Phi.$$

□

Genom detta ser vi på ytterligare ett sätt att det finns en bijektion mellen kvoten $G/\ker\Phi$ och bilden $\mathrm{im}\Phi$.

Exempel 3.1. Eftersom $\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})$ är kärnan till den surjektiva homomorfin

$$\det : \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$$

är det nu klart att kvoten $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})/\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})$ är isomorf med bilden $\mathbb{R}^*$. På samma sätt får vi att den alternerande gruppen A_n är kärnan till den surjektiva homomorfin

$$\mathrm{sgn} : S_n \longrightarrow \mathbb{Z}^*$$

och därmed är kvoten S_n/A_n isomorf med bilden $\mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}$.

Sats 3.3. **(Andra isomorfisatsen)** *Om K och H är delgrupper i G och H ligger i normalisatorn $N_G(K)$ så är HK en delgrupp i G, K är normal i HK och $H \cap K$ är normal i H. Dessutom gäller att*

$$\frac{HK}{K} \cong \frac{H}{H \cap K}.$$

Bevis. Vi börjar med att se att HK är en delgrupp. Om h_1, h_2 ligger i H och k_1, k_2 i K får vi

$$h_1k_1(h_2k_2)^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1} = h_1h_2^{-1}k_1'k_2'$$

för något k_1' och något k_2' i K, eftersom $H \subseteq N_G(K)$. Alltså är HK en delgrupp.

Att K är normal i HK följer av att

$$hkk'(hk)^{-1} = hkk'k^{-1}h^{-1} = hh^{-1}k'' = k''$$

för något k'' i K eftersom $H \subseteq N_G(K)$.

Om k ligger i $H \cap K$ och h ligger i H får vi att hkh^{-1} ligger i både H och K, och därmed i $H \cap K$, eftersom $H \subseteq N_G(K)$. Alltså är $H \cap K$ normal i H.

För att sedan bevisa isomorfin definierar vi en homomorfi från HK till $H/H \cap K$ genom

$$\Phi(hk) = hH \cap K,$$

för h i H och k i K. Denna är väldefinierad eftersom $h_1k_1 = h_2k_2$ innebär att $h_1^{-1}h_2 = k_1k_2^{-1}$ som ligger i $H \cap K$. Att det är en homomorfi framgår av att

$$\Phi(h_1k_1h_2k_2) = \Phi(h_1h_2k_1'k_2) = h_1h_2H \cap K = (h_1H \cap K) * (h_2H \cap K),$$

för alla h_1, h_2 i H och alla k_1, k_2 i K.

Eftersom Φ är surjektiv räcker det nu enligt den första isomorfisatsen att visa att $\ker \Phi = K$, men

$$\ker \Phi = \{hk \in HK | h \in H \cap K\} = K,$$

vilket bevisar satsen. □

Sats 3.4. (Tredje isomorfisatsen) *Om $H \subseteq K$ är normala delgrupper i G så gäller att*

$$\frac{G/H}{K/H} \cong G/K.$$

Bevis. Vi kan skapa en homomorfi

$$\Phi : G/H \longrightarrow G/K$$

genom

$$\Phi(gH) = gK$$

för alla g i G. Den är väldefinierad eftersom $g_1H = g_2H$ innebär att $g_1^{-1}g_2$ ligger i H, men eftersom $H \subseteq K$ är därmed $g_1K = g_2K$. För g_1 och g_2 i G gäller att

$$\Phi(g_1H * g_2H) = \Phi(g_1g_2H) = (g_1g_2)K = g_1K * g_2K$$

vilket visar att Φ är en homomorfi. Eftersom Φ är surjektiv, räcker det nu enligt den första isomorfisatsen att visa att $\ker \Phi = K/H$. Eftersom enheten i G/K är sidoklassen eK ges kärnan av

$$\ker \Phi = \{gH | gK = eK\} = \{gH | g \in K\} = K/H,$$

vilket bevisar satsen. □

4. Transpositioner och den alternerande gruppen

I den symmetriska gruppen S_n kallas tvåcyklerna för *transpositioner*. Detta är alltså permutationer som byter plats på precis två element.

Definition 4.1 (längd av permutation). Vi säger att *längden*, $\ell(\sigma)$, av en permutation σ i S_n är antalet *inversioner*, dvs

$$\ell(\sigma) = |\{(i,j) | i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\}|.$$

Sats 4.1. *Den symmetriska gruppen genereras av transpositionerna*

$$\{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\} = \{(1\,2), (2\,3), \ldots, (n-1\,n)\}.$$

Bevis. Vi kan bevisa detta genom induktion över längden, $\ell(\sigma)$. Den enda permutationen av längd 0 är identitetspermutationen som är en produkt av noll transpositioner.

Om vi har en permutation som har minst en inversion så finns minst ett i så att $\sigma(i+1) < \sigma(i)$, eftersom σ annars skulle vara strikt växande. Om vi sätter samman σ med transpositionen $s_i = (i\, i+1)$ minskar antaletinversioner med ett och vi kan per induktion anta att $\tau = \sigma \circ s_i$ kan skrivas som en produkt av transpositionerna $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$. Därmed kan vi nu också skriva $\sigma = \tau \circ s_i$ som en produkt av dessa transpositioner. □

Sats 4.2. *För varje permutation σ i S_n gäller att*

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}.$$

Bevis. Vi har tidigare definierat sgn genom att S_n verkar på Van der Monde-determinanten $\prod_{i<j}(x_j - x_i)$. Vi kan nu konstatera att varje transposition s_i byter tecken på $\prod_{i<j}(x_j - x_i)$, vilket betyder att $\mathrm{sgn}(s_i) = -1$. Om vi utför $\ell(\sigma)$ successiva transpositioner byter uttrycket tecken $\ell(\sigma)$ gånger och vi får att $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}$. □

Rekommenderade uppgifter

3.1 Definitioner och exempel. 1, 6, 8, 9, 12, 17, 22, 28, 37, 41, 42

3.2 Mer om sidoklasser och Lagranges sats. 4, 5, 9, 10, 11, 20, 22, 23

3.3 Isomorfisatserna. 3, 7, 8

3.4 Kompositionsserier och Hölderprogrammet (utgår).

3.5 Transpositioner och alternerande gruppen. 2, 4, 6, 11, 13, 17