



KTH Teknikvetenskap

**SF2703 ALGEBRA GRUNDKURS  
ANTECKNINGAR  
2009-01-27**

1. KVOTGRUPPER OCH HOMOMORFIER

Om vi har en delgrupp  $H$  av en grupp  $G$  skulle det vara naturligt att bilda en kvot  $G/H$  på samma sätt som vi gjort när det gäller att räkna med heltal modulo  $n$ . Vi skulle då räkna med någon form av restklasser modulo  $H$ , och de naturliga kandidaterna till restklasser är sidoklasserna,  $gH$ , för  $g \in G$ .

**Definition 1.1.** Om  $H$  är en delgrupp i en grupp  $G$  låter vi  $G/H$  beteckna mängden av vänstersidoklasser

$$G/H = \{gH \mid g \in G\}$$

Vi har redan sett att sidoklasserna är disjunkta eller identiska och två element  $g$  och  $g'$  ligger i samma sidoklass precis om  $g^{-1}g'$  ligger i  $H$ .

För att  $G/H$  ska kunna få en struktur av en grupp måste vi ha en gruppoperation och det naturliga skulle vara att ta två representanter i sidoklasserna som ska multipliceras och använda produkten av dessa element som definition av produkten av sidoklasserna, dvs

$$g_1H g_2H = g_1g_2H.$$

För att detta ska kunna fungera måste resultatet vara oberoende av vilka representanter vi väljer. Det visar sig att detta är sant om vänstersidoklasserna är lika med högersidoklasserna, dvs  $gH = Hg$ , för alla  $g \in G$ , eftersom vi då får att

$$g_1H g_2H = g_1(Hg_2)H = g_1(g_2H)H = g_1g_2H \cdot H = g_1g_2H.$$

**Definition 1.2 (normal delgrupp).** Om  $gH = Hg$  för alla  $g$  i  $G$  säger vi att  $H$  är en *normal* delgrupp i  $G$ .

Vi kan se att detta är det samma som att normalisatorn till  $H$  är hela  $G$ , eftersom  $gH = Hg$  är samma sak som  $gHg^{-1} = H$ .

**Sats 1.1.** *I en abelsk grupp är alla delgrupper normala.*

*Bevis.* Eftersom gruppoperationen,  $+$ , i en abelsk grupp är kommutativ är det klart att  $g + H = H + g$ .  $\square$

**Sats 1.2.** Om  $H$  är en normal delgrupp i  $G$  bildar  $G/H$  en grupp under operationen  $g_1H * g_2H = (g_1g_2)H$ .

*Bevis.* Vi har redan sett att operationen är väldefinierad när  $H$  är normal. Det återstår att visa att operationen uppfyller kraven för en gruppoperation. Operationen är associativ eftersom

$$(g_1H * g_2H) * g_3H = (g_1g_2)g_3H = g_1(g_2g_3)H = g_1H * (g_2H * g_3H)$$

eftersom operationen i  $G$  är associativ. Enheten i  $G/H$  är  $eH$ , eftersom

$$eH * gH = gH = gH * eH,$$

för alla  $g$  i  $G$ . Inversen till  $gH$  ges av  $g^{-1}H$  eftersom

$$gH * g^{-1}H = (gg^{-1})H = eH = (g^{-1}g)H g^{-1}H * gH.$$

□

**Exempel 1.1.** Vi kan beskriva alla ändliga cykliska grupper  $C_n$  som kvoten av  $\mathbb{Z}$  med delgruppen  $n\mathbb{Z}$ , som är normal eftersom  $C_n$  är abelsk. Vi får

$$C_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

där vi ser på  $\mathbb{Z}$  som en grupp under addition.

**Sats 1.3.** Kärnan till en homomorfi är en normal delgrupp.

*Bevis.* Låt  $\Phi : G \rightarrow H$  vara en homomorfi mellan två grupper. För varje element  $g$  i  $G$  och varje element  $h \in \ker \Phi$  har vi

$$\Phi(ghg^{-1}) = \Phi(g)\Phi(h)\Phi(g^{-1}) = \Phi(g)e\Phi(g^{-1}) = \Phi(gg^{-1}) = \Phi(e) = e.$$

Alltså tillhör  $ghg^{-1}$  kärnan som därmed är normal. □

**Exempel 1.2.** Eftersom  $\text{Sl}_n(\mathbb{R})$  är kärnan i homomorfin  $\det : \text{Gl}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  är  $\text{Sl}_n(\mathbb{R})$  en normal delgrupp och vi kan bilda kvoten  $\text{Gl}_n(\mathbb{R})/\text{Sl}_n(\mathbb{R})$ . Denna delgrupp är isomorf med  $\mathbb{R}^*$  under multiplikation.

**Exempel 1.3.** Den alternerande gruppen  $A_n$  är kärnan till homomorfin  $\text{sgn} : S_n \rightarrow \mathbb{Z}^*$ . Kvoten  $S_n/A_n$  är isomorf med  $\mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}$ .

## 2. MER OM SIDOKLASSER

Vi har redan sett på Lagranges sats tidigare. Om vi ser på fallet när en delgrupp är stabilsatorn för ett element under gruppverkan kan vi få ytterligare en tolkning av antalet sidoklasser.

**Sats 2.1.** Om gruppen  $G$  verkar på en mängd  $X$  har vi att antalet sidoklasser till stabilsatorn  $G_x$  ges av antalet element i banan  $Gx$ . Alltså gäller att

$$|G_x| \cdot |Gx| = |G|,$$

för alla element  $x$  i  $X$ .

*Bevis.* Vi skulle vilja se på antalet sidoklasser till  $H = G_x$ . Vi vet att två element,  $g$  och  $g'$ , ligger i samma sidoklass om och endast om  $g^{-1}g'$  ligger i  $H$ , men det betyder att

$$g^{-1}g'.x = x \iff g'.x = g.x.$$

Alltså får vi en bijektion mellan sidoklasserna i till  $H = G_x$  och elementen i banan

$$Gx = \{g.x | g \in G\},$$

vilket bevisar satsen. □

**Exempel 2.1.** Om vi ska räkna antalet element i  $\text{Gl}_n(\mathbb{F}_q)$  – den generella linjära gruppen över en kropp med  $q$  element – får vi att

$$|\text{Gl}_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)|\text{Gl}_n(\mathbb{F}_q)_v|$$

för varje nollskild vektor  $v \in \mathbb{F}_q^n$  eftersom banan för  $v$  är  $\mathbb{F}_q^n \setminus \{0\}$ . Å andra sidan får vi att stabilisatorn för  $v = (1, 0, \dots, 0)^T$  ges av alla matriser i  $\text{Gl}_n(\mathbb{F}_q)$  vars första kolonn är  $v$ . Antalet element är således  $q^{n-1}|\text{Gl}_{n-1}(\mathbb{F}_q)|$  och med induktion får vi

$$|\text{Gl}_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q - 1)q^{n(n-1)/2}.$$

**Exempel 2.2.** Genom att se på hur symmetrigrupperna för de platonska kropparna verkar på mängden av sidor får vi antalet element för dodekaedern som

$$5 \cdot 12 = 60$$

eftersom varje sida fixeras av fem rotationer och varje sida kan skickas till var och en av de tolv sidorna. På samma sätt får vi  $3 \cdot 4 = 12$  symmetrier av tetraedern,  $6 \cdot 6 = 24$  symmetrier av kubens,  $3 \cdot 8 = 24$  symmetrier av oktaedern och  $3 \cdot 20 = 60$  symmetrier av ikosaedern.

**Definition 2.1 (Transitiv gruppverkan).** Vi säger att en grupp  $G$  verkar *transitivt* på en mängd  $X$  om det för varje element i  $X$  kan gå på varje annat element i  $X$ .

**Sats 2.2.** Om  $H$  och  $K$  är delgrupper i  $G$  gäller att

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}.$$

*Bevis.* Mängden  $HK$  kan ses som en union av sidoklasser till  $K$ . Det gäller nu bara att räkna hur många sidoklasser det är. Vi ser att  $H$  verkar transitivt på mängden av sidoklasser som ligger i  $HK$  genom multiplikation till vänster. Antalet sidoklasser kan nu fås genom  $|H|/|H_x|$  där  $H_x$  är stabilisatorn för någon sidoklass. Vi kan lika gärna titta på stabilisatorn till sidoklassen  $eK = K$ . Ett element  $h$  i  $H$  fixerar  $K$  om och endast om  $hK = K$ , dvs om och endast om  $h$  ligger i  $K$ . Alltså ges stabilisatorn av  $H \cap K$ , och vi har att  $HK$  består av  $|H|/|H \cap K|$  sidoklasser till  $|K|$ , vilket bevisar satsen. □

**Exempel 2.3** (Uppgift 3.1.22).

- Visa att  $H \cap K$  är en normal delgrupp om  $H$  och  $K$  är normala.
- Visa skärningen av en uppsättning normala delgrupper  $\{H_i\}_i \in I$  är normal.

Det räcker att se på b) eftersom a) är ett specialfall. Tag ett element  $h$  som ligger i skärningen  $H = \bigcap_{i \in I} H_i$ . Det betyder att  $h$  ligger i  $H_i$  för alla  $i \in I$ . Eftersom dessa delgrupper är normala gäller att

$$ghg^{-1} \in H_i$$

för alla  $g$  i  $G$  och alla  $i$  i  $I$ . Alltså ligger  $ghg^{-1}$  i  $H$  som därmed är normal.

**Exempel 2.4.** (Uppgift 3.1.34) Låt  $D_{2n}$  vara den dihedrala gruppen med generatorer  $r$  och  $s$  med relationer  $r^n = s^2 = e$ ,  $rs = sr^{-1}$ . Låt  $k$  vara en delare i  $n$ .

a) Visa att  $\langle r^k \rangle$  är en normal delgrupp av  $D_{2n}$ ,

b) Visa att  $D_{2n}/\langle r^k \rangle \cong D_{2n/k}$ .

*Lösning:* Vi kan skriva ett element i  $D_{2n}$  som  $r^i s^j$ , med  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  och  $j \in \{1, 2\}$ . För ett element,  $r^{mk}$ , i  $\langle r^k \rangle$  får vi

$$r^i s^j r^{mk} (r^i s^j)^{-1} = r^i s^j r^{mk} s^{-j} r^{-i} = \begin{cases} r^i r^{mk} r^{-i} = r^{mk}, & \text{om } j = 0, \\ s r^{-i} r^{mk} r^i s = r^{-mk}, & \text{om } j = 1. \end{cases}$$

I båda fallen ligger elementet kvar i  $\langle r^k \rangle$ , vilket visar att delgruppen är normal.

Antalet element i kvoten  $D_{2n}/\langle r^k \rangle$  är  $2n/k$ . Om vi kan hitta en injektiv homomorfi mellan grupperna är de därmed isomorfa. Vi låter  $D_{2n/k}$  vara genererad av  $R$  och  $S$  med relationerna  $R^{n/k} = S^2 = e$  och  $RS = SR^{-1}$ . En naturlig kandidat till homomorfi ges nu av

$$R \mapsto r\langle r^k \rangle, \quad S \mapsto s\langle r^k \rangle.$$

### 3. ISOMORFISATSERNA

**Sats 3.1. (Första isomorfisatsen)** För en gruppomomorfi  $\Phi : G \longrightarrow H$  gäller att

$$G/\ker \Phi \cong \text{im} \Phi.$$

*Bevis.* Till att börja med kan vi anta att  $H = \text{im} \Phi$  genom att se på sammansättningen

$$G \longrightarrow \text{im} \Phi \longrightarrow H.$$

Vi har projektionen

$$G \longrightarrow G/\ker \Phi$$

och vi kan få en faktorisering av homomorfin  $G \longrightarrow \text{im} \Phi$  genom  $G/\ker \Phi$  om vi kan få en inducerad homomorfi  $\Psi : G/\ker \Phi \longrightarrow \text{im} \Phi$ . För att det ska stämma måste vi för ett element  $g \ker \Phi$  i  $G/\ker \Phi$  ta bilden av  $g$  i  $\text{im} \Phi$ , dvs låta

$$\Psi(g \ker \Phi) = \Phi(g) \in \text{im} \Phi.$$

Detta definierar en funktion från  $G/\ker \Phi$  eftersom olika representanter för samma sidoklass uppfyller  $g_1^{-1}g_2 \in \ker \Phi$ , vilket är detsamma som att  $\Phi(g_1) = \Phi(g_2)$ . Vi ser att

$$\Psi(g_1 \ker \Phi * g_2 \ker \Phi) = \Psi(g_1 g_2 \ker \Phi) = \Phi(g_1 g_2) = \Phi(g_1) \Phi(g_2) = \Psi(g_1 \ker \Phi) \Psi(g_2 \ker \Phi)$$

vilket visar att  $\Psi$  är en homomorfi.

För att visa att  $\Psi$  är en isomorfi räcker det att visa att den är surjektiv och injektiv. Att den är surjektiv är klart eftersom varje element i  $\text{im} \Phi$  är lika med  $\Phi(g) = \Psi(g \ker \Phi)$  för något element  $g$  i  $G$ .

För att se att den är injektiv ser vi på kärnan som ges av

$$\ker \Psi = \{g \in G \mid \Phi(g) = e\} = \{e \in \ker \Phi\}$$

och eftersom kärnan bara består av enhetselementet är homomorfien injektiv.  $\square$

**Definition 3.1 (fiber av homomorfier).** För en homomorfier  $\Phi : G \longrightarrow H$  och ett element  $h$  i  $H$  säger vi att

$$\{g \in G \mid \Phi(g) = h\}$$

är *fibern* av  $\Phi$  över  $h$ .

**Sats 3.2.** *Fibrerna till en homomorfier är samma sak som sidoklasserna till kärnan.*

*Bevis.* Om  $\Phi(g_0) = h$  har vi att

$$\{g \in G \mid \Phi(g) = h\} = \{g_0 g \mid g \in \ker \Phi\} = g_0 \ker \Phi$$

eftersom

$$\Phi(g) = \Phi(g_0) \iff \Phi(g_0^{-1}g) = e \iff g_0^{-1}g \in \ker \Phi \iff g \in g_0 \ker \Phi.$$

$\square$

Genom detta ser vi på ytterligare ett sätt att det finns en bijektion mellan kvoten  $G/\ker \Phi$  och bilden  $\text{im} \Phi$ .

**Exempel 3.1.** Eftersom  $\text{Sl}_n(\mathbb{R})$  är kärnan till den surjektiva homomorfien

$$\det : \text{Gl}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$$

är det nu klart att kvoten  $\text{Gl}_n(\mathbb{R})/\text{Sl}_n(\mathbb{R})$  är isomorf med bilden  $\mathbb{R}^*$ . På samma sätt får vi att den alternerande gruppen  $A_n$  är kärnan till den surjektiva homomorfien

$$\text{sgn} : S_n \longrightarrow \mathbb{Z}^*$$

och därmed är kvoten  $S_n/A_n$  isomorf med bilden  $\mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}$ .

**Sats 3.3. (Andra isomorfisatsen)** Om  $K$  och  $H$  är delgrupper i  $G$  och  $H$  ligger i normalisatorn  $N_G(K)$  så är  $HK$  en delgrupp i  $G$ ,  $K$  är normal i  $HK$  och  $H \cap K$  är normal i  $H$ . Dessutom gäller att

$$\frac{HK}{K} \cong \frac{H}{H \cap K}.$$

*Bevis.* Vi börjar med att se att  $HK$  är en delgrupp. Om  $h_1, h_2$  ligger i  $H$  och  $k_1, k_2$  i  $K$  får vi

$$h_1 k_1 (h_2 k_2)^{-1} = h_1 k_1 k_2^{-1} h_2^{-1} = h_1 h_2^{-1} k_1' k_2'$$

för något  $k_1'$  och något  $k_2'$  i  $K$ , eftersom  $H \subseteq N_G(K)$ . Alltså är  $HK$  en delgrupp.

Att  $K$  är normal i  $HK$  följer av att

$$h k k' (h k)^{-1} = h k k' k^{-1} h^{-1} = h h^{-1} k'' = k''$$

för något  $k''$  i  $K$  eftersom  $H \subseteq N_G(K)$ .

Om  $k$  ligger i  $H \cap K$  och  $h$  ligger i  $H$  får vi att  $h k h^{-1}$  ligger i både  $H$  och  $K$ , och därmed i  $H \cap K$ , eftersom  $H \subseteq N_G(K)$ . Alltså är  $H \cap K$  normal i  $H$ .

För att sedan bevisa isomorfin definierar vi en homomorfi från  $HK$  till  $H/H \cap K$  genom

$$\Phi(hk) = hH \cap K,$$

för  $h$  i  $H$  och  $k$  i  $K$ . Denna är väldefinierad eftersom  $h_1k_1 = h_2k_2$  innebär att  $h_1^{-1}h_2 = k_1k_2^{-1}$  som ligger i  $H \cap K$ . Att det är en homomorfi framgår av att

$$\Phi(h_1k_1h_2k_2) = \Phi(h_1h_2k_1'k_2) = h_1h_2H \cap K = (h_1H \cap K) * (h_2H \cap K),$$

för alla  $h_1, h_2$  i  $H$  och alla  $k_1, k_2$  i  $K$ .

Eftersom  $\Phi$  är surjektiv räcker det nu enligt den första isomorphisatsen att visa att  $\ker \Phi = K$ , men

$$\ker \Phi = \{hk \in HK \mid h \in H \cap K\} = K,$$

vilket bevisar satsen. □

**Sats 3.4. (Tredje isomorphisatsen)** Om  $H \subseteq K$  är normala delgrupper i  $G$  så gäller att

$$\frac{G/H}{K/H} \cong G/K.$$

*Bevis.* Vi kan skapa en homomorfi

$$\Phi : G/H \longrightarrow G/K$$

genom

$$\Phi(gH) = gK$$

för alla  $g$  i  $G$ . Den är väldefinierad eftersom  $g_1H = g_2H$  innebär att  $g_1^{-1}g_2$  ligger i  $H$ , men eftersom  $H \subseteq K$  är därmed  $g_1K = g_2K$ . För  $g_1$  och  $g_2$  i  $G$  gäller att

$$\Phi(g_1H * g_2H) = \Phi(g_1g_2H) = (g_1g_2)K = g_1K * g_2K$$

vilket visar att  $\Phi$  är en homomorfi. Eftersom  $\Phi$  är surjektiv, räcker det nu enligt den första isomorphisatsen att visa att  $\ker \Phi = K/H$ . Eftersom enheten i  $G/K$  är sidoklassen  $eK$  ges kärnan av

$$\ker \Phi = \{gH \mid gK = eK\} = \{gH \mid g \in K\} = K/H,$$

vilket bevisar satsen. □

#### 4. TRANSPOSITIONER OCH DEN ALTERNERANDE GRUPPEN

I den symmetriska gruppen  $S_n$  kallas tvåcyklerna för *transpositioner*. Detta är alltså permutationer som byter plats på precis två element.

**Definition 4.1 (längd av permutation).** Vi säger att *längden*,  $\ell(\sigma)$ , av en permutation  $\sigma$  i  $S_n$  är antalet *inversioner*, dvs

$$\ell(\sigma) = |\{(i, j) \mid i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\}|.$$

**Sats 4.1.** Den symmetriska gruppen genereras av transpositionerna

$$\{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\} = \{(1\ 2), (2\ 3), \dots, (n-1\ n)\}.$$

*Bevis.* Vi kan bevisa detta genom induktion över längden,  $\ell(\sigma)$ . Den enda permutationen av längd 0 är identitetspermutationen som är en produkt av noll transpositioner.

Om vi har en permutation som har minst en inversion så finns minst ett  $i$  så att  $\sigma(i+1) < \sigma(i)$ , eftersom  $\sigma$  annars skulle vara strikt växande. Om vi sätter samman  $\sigma$  med transpositionen  $s_i = (i \ i+1)$  minskar antalet inversioner med ett och vi kan per induktion anta att  $\tau = \sigma \circ s_i$  kan skrivas som en produkt av transpositionerna  $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ . Därmed kan vi nu också skriva  $\sigma = \tau \circ s_i$  som en produkt av dessa transpositioner.  $\square$

**Sats 4.2.** För varje permutation  $\sigma$  i  $S_n$  gäller att

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}.$$

*Bevis.* Vi har tidigare definierat  $\text{sgn}$  genom att  $S_n$  verkar på Van der Monde-determinanten  $\prod_{i < j} (x_j - x_i)$ . Vi kan nu konstatera att varje transposition  $s_i$  byter tecken på  $\prod_{i < j} (x_j - x_i)$ , vilket betyder att  $\text{sgn}(s_i) = -1$ . Om vi utför  $\ell(\sigma)$  successiva transpositioner byter uttrycket tecken  $\ell(\sigma)$  gånger och vi får att  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}$ .  $\square$

---

#### REKOMMENDERADE UPPGIFTER

**3.1 Definitioner och exempel.** 1, 6, 8, 9, 12, 17, 22, 28, 37, 41, 42

**3.2 Mer om sidoklasser och Lagranges sats.** 4, 5, 9, 10, 11, 20, 22, 23

**3.3 Isomorfiteterna.** 3, 7, 8

**3.4 Kompositionsserier och Hölderprogrammet (utgår).**

**3.5 Transpositioner och alternerande gruppen.** 2, 4, 6, 11, 13, 17