KTH Teknikvetenskap

SF2703 ALGEBRA GRUNDKURS
ANTECKNINGAR
2009-02-05

1. Grupper som verkar genom konjugering på sig själva

Förutom att en grupp verkar på sig själv genom multiplikation till vänster finns det ytterligare en naturlig verkan som alltid är definierad; *konjugering*, dvs

$$g.h = ghg^{-1}$$

för g, h i G. Vi har redan ett namn på stabilisatorn för ett element g i G under denna verkan, nämligen *centralisatorn*, $C_G(g)$, till g. I själva verket kan vi se att G också verkar på mängden av alla delmängder av G genom konjugering. Vi har då att en delmängd $A \subseteq G$ stabilseras av $N_G(A)$, dvs normalisatorn till A i G.

Banorna i G under konjugering kallas *konjugatklasser* och de definierar en ekvivalensrelation på G genom

$$g \sim g' \iff g = hg'h^{-1}, \quad \text{för något } h \in G.$$

Vi säger då att g och g' är *konjugerade*.

Antalet element i en viss bana ges nu av den vanliga relationen

$$|Gx| = \frac{|G|}{|G_x|},$$

vilket i det här fallet blir

$$|\{g' \in G | g' \sim g| = \frac{|G|}{|C_G(g)|}.$$

Vi ser att konjugatklasserna innehåller ett enda element precis om detta element ligger i centret, $Z(G)$.

Sats 1.1. (Klassekvationen) *För en ändlig grupp gäller att*

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{r} \frac{|G|}{|C_G(g_i)|}$$

där $g_1, g_2, \ldots, g_r$ är representanter för de konjugatklasser som innehåller mer än ett element.

Bevis. Vi vet redan att konjugatklasserna ger en partition av G. De element som ligger i $Z(G)$ svarar mot konjugatklasser med bara ett element. De övriga r konjugatklasserna har $|G|/|C_G(g_i)|$ element, där g_i är någon representant för konjugaklassen. □

2. AUTOMORFIER

En isomorfi mellan från en grupp till sig själv kallas för en *automorfi* och det är klart att sammansättningar av automorfier och inverser av automorfier också är automorfier. Alltså bildar mängden av automorfier, $\Phi : G \longrightarrow G$, en delgrupp av symmetriska gruppen på G. Vi kallar denna delgrupp för *automorfigruppen* till G och betecknar den med $\mathrm{Aut}(G)$.

Varje element g i en grupp G definierar en automorfi

$$\Phi_g : G \longrightarrow G$$

genom

$$\Phi_g(h) = ghg^{-1},$$

för alla h i G. Dessa automorfier kallas *inre automorfier* och bildar en delgrupp, $\mathrm{Inn}(G) \subseteq \mathrm{Aut}(G)$.

Vi har också att detta motsvarar en homomorfi

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(G) \\ g & \longmapsto & \Phi_g \end{array}$$

eftersom

$$\Phi_h\Phi_k(g) = h(kgk^{-1})h^{-1} = (hk)g(hk)^{-1} = \Phi_{hk}(g)$$

för alla $g, h, k \in G$.

Om G är abelsk är alla inre automorfier triviala, vilket betyder att denna homomorfi skickar hela G på identitetsautomorfin $Id \in \mathrm{Aut}(G)$.

I allmänhet är kärnan av homomorfin $G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$ alla element som kommuterar med alla andra, dvs $Z(G)$.

REKOMMENDERADE UPPGIFTER

4.3 Grupper som verkar på sig själva med konjugering - Klassekvationen. 2, 3, 4, 5, 9, 12, 13, 22, 25, 26, 27

4.4 Automorfier. 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 17
