KTH Teknikvetenskap

# SF2703 ALGEBRA GRUNDKURS
# ANTECKNINGAR
# 2009-02-10

## 1. SYLOWS SATS

För att studera ändliga grupper är det intressant att se på vilka delgrupper som finns av olika ordningar. Vi har redan sett att Cauchys sats säger att en grupp vars ordning är delbar med ett visst primtal $p$ också måste ha ett element av ordning $p$, vilket är detsamma som att säga att det finns en delgrupp av ordning $p$. Vi kan gå vidare och se på delgrupper som har primtalspotensordning. Det visar sig att vi har en väldigt stark sats som talar om existensen av sådana delgrupper.

**Definition 1.1** ($p$**-grupper,** $p$**-Sylowdelgrupper).** Om $p$ är ett primtal är en $p$-grupp en grupp av ordning $p^n$, för något positivt heltal $n$. Om $G$ är en grupp av ordning $p^n m$, där $p$ inte delar $m$, så är en $p$-Sylowdelgrupp en delgrupp av ordning $p^n$.

**Sats 1.1 (Sylows sats).** *Om $G$ är en ändlig grupp av ordning $p^n m$, där $p$ är ett primtal som inte delar $m$ så gäller följande:*

$i)$ *$G$ har en $p$-Sylowdelgrupp, dvs en grupp av ordning $p^n$.*
$ii)$ *Varje $p$-delgrupp ligger i ett konjugat till varje $p$-Sylowdelgrupp.*
$iii)$ *Antalet $p$-Sylowdelgrupper är kongruent med ett modulo $p$ och delar $m$.*

Beviset för satsen kan göras mer eller mindre komplicerat, men en viktig idé bakom resultatet är följande:

Om $P$ och $Q$ är $p$-delgrupper kan vi se på element i $Q$ som stabiliserar $P$ under konjugering. Dessa element bildar en delgrupp, $H$, som är skärningen mellan $Q$ och normalisatorn, $N_G(P)$. Eftersom $H$ nu är en $p$-delgrupp som helt ligger i normalisatorn till $P$ får vi att $HP$ en delgrupp. Om vi nu antar att $P$ har maximal ordning bland $p$-delgrupper måste vi ha att $H \subseteq P$, annars skulle $HP$ vara en $p$-delgrupp som innehöll $P$. Därmed har vi sett att

$$Q \cap N_G(P) = Q \cap P$$

för varje $p$-delgrupp $Q$ och varje maximal $p$-delgrupp $P$.

*Bevis av Sylows sats.* $i)$ För att visa att det finns en $p$-Sylowdelgrupp kan vi använda induktion över ordningen till $G$. När $|G| = p$ är påståendet trivialt sant. Vi kan därför anta per induktion att påståendet är sant för alla grupper av lägre ordning än $G$.

Om $Z(G) = G$ är gruppen abelsk, och vi kan använda argumentet ovan för att se att det finns en unik $p$-Sylowdelgrupp, $P$, som består av alla element vars ordning är en potens av

$p$. (I själva verket kan vi bilda en produkt av de delgrupper som består av element som har primtalspotensordningar. Dessa har trivial skärnining och varje element i en abelsk grupp kan skrivas som en produkt (summa) av element med primtalpotensordning. Alltså är $G$ lika med produkten av dessa delgrupper och eftersom ordningen av dessa enligt Cauchys sats måste vara primtalspotenser får vi att de är Sylowdelgrupper.)

Om $G$ inte är abelsk och $|Z(G)|$ är delbart med $p$ kan vi kvota $G$ med $p$-Sylowdelgruppen, $P$ i $Z(G)$ och får då per induktion en $p$-Sylowdelgrupp, $Q$, i $G/Z(G)$. Vi kan ta inversbilden, $\Phi^{-1}(Q)$, av $Q$ under kvothomomorfin $\Phi : G \longrightarrow G/P$ och får då en $p$-Sylowdelgrupp i $G$.

Alltså kan vi nu anta att $|Z(G)|$ inte är delbart med $p$. Enligt klassekvationen måster därmed någon av de icke-triviala konjugatklasserna ha en ordning som inte är delbar med $p$. För ett element, $g$, i en sådan konjugatklass måste ordningen av centraliosatorn, $C_G(g)$, vara delbar med $p^n$, eftersom $|C_G(g)| \cdot |G : C_G(g)| = |G| = p^n m$, och $p$ inte delar $|G : C_G(g)|$. Eftersom $g$ inte ligger i $|Z(G)|$ är $C_G(g)$ en äkta delgrupp och per induktion har vi en $p$-Sylowdelgrupp, $P$ av $C_G(g)$, men då är $P$ också en $p$-Sylowdelgrupp i $G$.

Om $P$ nu är en $p$-Sylowdelgrupp kan vi se på hur $P$ verkar på mängden av konjugat till $P$ genom konjugering. Vi får då en bana som bara består av $P$, men övriga banor måste ha en ordning som är delbar med $p$, eftersom inte hela $P$ kan stabilisera någon annan $p$-Sylowdelgrupp än sig själv enligt resonemanget ovan. Alltså är antalet konjugat till $P$ kongruent med ett modulo $p$.

För att bevisa $ii)$ ser vi nu på en $p$-grupp $Q$ och en $p$-Sylowdelgrupp $P$ i $G$ och vill visa att $Q$ ligger i ett konjugat till $P$. Låt $Q$ verka på mängden av konjugat av $P$ genom konjugering. Om $Q$ inte ligger i något av konjugaten så kan den inte heller stabilisera något av dem. Därmed är alla banor icke-triviala och eftersom antalet element i varje bana är en $p$-potens, måste antalet konjugat till $P$ vara delbart med $p$, vilket motsäger det vi just visade ovan. Alltså ligger $Q$ i någon av konjugaten till $P$, vilket bevisar $ii)$.

Vi kan nu bevisa $iii)$. Eftersom vi kan använda $ii)$ på varje $p$-Sylowdelgrupp har vi att alla $p$-Sylowdelgrupper är konjugerade och antalet konjugat till en given $p$-Sylowdelgrupp är därmed kongruent med ett modulo $p$. Antalet konjugat till en $p$-Sylowdelgrupp är också lika med index för stabilisatorn för verkan av $G$ på mängden av konjugat till delgruppen. Eftersom stabilisatorn innehåller $p$-Sylowdelgruppen själv har vi att index för stabilisatorn måste vara en delare i $m$. $\square$

---

## Rekommenderade uppgifter

**4.5 Sylows sats.** 2,3,4,5,9,13

---