KTH Teknikvetenskap

SF2703 Algebra grundkurs
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 1
Fredagen den 30 januari, 2009

Uppgift.

a) Definiera vad som menas med kärnan av en homomorfi. **(1)**

b) Visa att produkten HK av två delgrupper i en grupp G är en delgrupp om en av dem är normal. **(1)**

c) En grupp G verkar på mändgen av delmängder i G genom konjugering, dvs $g.A = \{gag^{-1}|a \in A\}$. Visa att normalisatorn för A i G är samma sak som stabilisatorn för A under denna gruppverkan. **(1)**

d) Låt $G = D_{2n}$ vara dihedrala gruppen och låt $H = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\} \subseteq D_{2n}$. Visa att H är en normal delgrupp och bestäm kvoten G/H. **(2)**

e) Visa att den generella linjära gruppen $\mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$ verkar på mångden av reella 3×2-matriser genom multiplikation till vänster. Bestäm banorna under denna verkan. **(2)**

f) Symmetrigruppen, G, för en kub verkar på mängden X av axlar genom motstående sidor på kuben. Bestäm bilden och kärnan av den homomorfi

$$\Phi : G \longrightarrow S_3$$

som detta motsvarar. **(2)**

Lösningsförslag.

a). Kärnan till en grupphomomorfi $\Phi : G \longrightarrow H$ består av alla element i G som går på identitetselementet i H, dvs

$$\ker \Phi = \{g \in G|\Phi(g) = e_H\}.$$

b). Om H är normal har vi att $Hk = kH$ för alla element k i K. Om h_1k_1 och h_2k_2 är två element i HK kan vi se att

$$h_1k_1(h_2k_2)^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1} = h_1hk_1k_2^{-1} \in HK$$

där $h = k_1k_2^{-1}h_2^{-1}k_2k_1^{-1}$ är något element i H eftersom H är normal. Alltså är HK en delgrupp i G.

Om istället K är normal får vi

$$h_1k_1(h_2k_2)^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1} = h_1h_2^{-1}k \in HK$$

där $k = h_2k_1k_2^{-1}h_2^{-1}$ är något element i K eftersom K är normal.

c). För varje element g i G och varje delmängd $A \subseteq G$ har vi att

$$gAg^{-1} = \{gag^{-1} | a \in A\} \subseteq G.$$

Om $X = 2^G$ betecknar mängden av delmängder av G får vi en verkan

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, A) & \mapsto & g.A = gAg^{-1} \end{array}$$

som uppfyller

$$\begin{array}{rl} i) & e.A = eAe^{-1} = A, \\ ii) & g.(h.A) = g(hAh^{-1})g^{-1} = (gh)A(gh)^{-1}. \end{array}$$

Alltså är det en gruppverkan. Stabilisatorn för en viss delmängd $A \in X$ ges av

$$G_A = \{g \in G | g.A = A\} = \{g \in G | gAg^{-1} = A\}$$

vilket per definition är normalisatorn, $N_G(A)$.

d). H består av alla rotationer i D_{2n} och D_{2n} är ändlig räcker det att konstatera att H är sluten under sammansättning för att se att H är en delgrupp. Vi har att $r^i r^j = r^{i+j}$ som är en rotation och därmed ligger i H.

Speglingarna i D_{2n} kan skrivas som $s_i = sr^i$, för $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. För varje rotation r^j har vi att

$$s_i r^j (s_i)^{-1} = sr^i r^j (sr^i)^{-1} = sr^{i+j-i} s = ssr^{-j} = r^{-j}$$

och

$$r^i r^j (r^i)^{-1} = r^i r^j r^{-i} = r^{i+j-i} = r^j.$$

Alltså gäller att

$$gr^j g^{-1} \in \{r^j, r^{-j}\} \subseteq H$$

för varje element r^j i H och varje element g i D_{2n}, och därmed är H en normal delgrupp av D_{2n}.

För att bestämma kvoten av D_{2n} med H räcker det att konstatera att $|H|$ består av hälften av elementen i D_{2n}. Därmed är ordnignen av kvoten två och $D_{2n}/H \cong C_2 \cong \{\pm 1\}$. Homomorfin från D_{2n} till kvoten ges av att rotationerna går på $+1$ och speglingarna på -1. Om vi representerar D_{2n} med matriser motsvarar detta homomorfin till $\{\pm 1\}$ som ges av determinanten.

e). Låt $G = \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$ och låt $X = \{\text{reella } 3 \times 2 - \text{matriser}\}$. Definiera verkan av G på X genom $A.B = AB$, för $A \in G$ och $B \in X$. Vi behöver se att det är en gruppverkan, dvs att

$$\begin{array}{rl} i) & I_3.B = B \\ ii) & A.(A'.B) = A(A'B) = AA'B = (AA')B \end{array}$$

eftersom I_3 är ett neutralt element för matrismultiplikationen som dessutom är associativ.

Vi ska nu bestämma banorna i X under denna gruppverkan. Eftersom $A \in G$ alltid är inverterbar har vi att rangen av AB är lika med rangen för A. Varje matris i X av rang två kan fås på formen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

genom Gauss-Jordan-elimination, dvs genom multiplikation med en inverterbar matris till vänster. Matriser av rang ett kan på samma sätt reduceras till

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Endast nollmatrisen har rang noll. Det betyder att vi har en bana i x för varje sådan normalform. Observera att det finns oändligt många banor svarande mot den andra normalformen, en för varje reellt tal a.

f). Vi ser på kuben som en tärning och betecknar axlarna genom sidorna ettan, tvåan och trean med 1, 2, respektive 3.

Homomorfin Φ är surjektiv eftersom alla tre transpositioner (12), (23) och (13) ligger i bilden, vilket vi ser genom att rotera kuben 90° kring någon av de tre axlarna. Bilden är en delgrupp som innehåller generatorerna till S_3, vilket innebär att bilden måste vara hela S_3. Enligt första isomorfisatsen måste nu kärnan ha ordningean

$$|\ker \Phi| = \frac{|G|}{|\mathrm{im}\Phi|} = \frac{24}{6} = 4.$$

Om vi roterar kuben 180° kring någon av axlarna går de övriga två axlarna tillbaka på sig själva. Det finns tre sådana rotationer, r_1, r_2, r_3, som ligger i kärnan, som därmed måste bestå av $\{Id, r_1, r_2, r_3\}$. Eftersom alla de tre rotationerna har ordning två är gruppen isomorf med V_4 - Kleins fyrgrupp.

Svar:

a) $\ker \Phi = \{g \in G | \Phi(g) = e_H\}$.
d) Kvoten är $\{\pm 1\} \cong Z_2$, dvs gruppen med två element.
e) Banorna ges av matriser med olika normalformerna

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

f) $\mathrm{im}\Phi = S_3$ och $\ker \Phi = \{Id, r_1, r_2, r_3\} \cong V_4$.

Bedömningskriterier.

a) Helt korrekt definition av kärnan till Φ, **1 poäng**.
b) Korrekt bevis för att produkten är en delgrupp om H eller K är normal, **1 poäng**.
c) Korrekt bevis för att stabilisatorn är lika med normalisatorn, **1 poäng**.
d)
- Korrekt bevis för H är en normal delgrupp, **1 poäng**.
- Korrekt beräknad kvot, **1 poäng**.

e)
- Korrekt bevis av att det är en gruppverkan, **1 poäng**.
- Korrekt motiverade banor, **1 poäng**.

f)
- Korrekt bestämning av bilden till Φ, **1 poäng**.
- Korrekt bestämning av kärnan till Φ, **1 poäng**.