KTH Teknikvetenskap

SF2703 Algebra grundkurs
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 2
Torsdagen den 19 februari, 2009

Uppgift.

a) Formulera struktursatsen för ändliga abelska grupper. **(1)**

b) Skriv den multiplikativa gruppen i $\mathbb{Z}_{24}$ som en produkt av cykliska grupper. **(2)**

c) Visa att centrets index, $|G : Z(G)|$, ger en övre gräns för antalet element i en konjugatklass i en ändlig grupp G. **(2)**

d) Avgör om S_4 har någon delgrupp som är isomorf med den direkta produkten $Z_2 \times Z_4$. **(2)**

e) Bestäm kommutatordelgruppen, $[G, G]$, då $G = S_5$. **(2)**

Lösningsförslag.

a). En ändlig abelsk grupp A kan skrivas som en direkt produkt av icke-triviala cykliska grupper

$$A \cong Z_{n_1} \times Z_{n_2} \times \cdots \times Z_{n_r}$$

där n_{i+1} delar n_i, för $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Sättet att göra det är unikt.

b). Den multiplikativa gruppen, G, i $\mathbb{Z}_{24}$ består av alla restklasser $[n]$ där n inte är delbart med vare sig två eller tre. Det finns 12 klasser där n inte är delbart med två och två tredjedelar av dessa är inte heller delbara med tre. Alltså har vi att $|G| = 8$. Vi ser nu på hur många av dessa element som uppfyller $x^2 = 1$. $G = \{[1], [5], [7], [11], [13], [17], [19], [23]\}$. Det visar sig att

$$(\pm 1)^2 \equiv (\pm 5)^2 \equiv (\pm 7)^2 \equiv (\pm 11)^2 \equiv 1 \pmod{24}$$

vilket säger att G är en elementär abelsk grupp av ordning $8 = 2^3$ och därmed isomorf med $Z_2 \times Z_2 \times Z_2 = Z_2^3$.

För att vara mer precis skulle vi kunna skriva upp en uppsättning delgrupper vars produkt är hela gruppen. Det kan ges av exempelvis

$$G = \langle [5] \rangle \times \langle [7] \rangle \times \langle [13] \rangle$$

eftersom $[7]$ inte ligger i delgruppen $\langle [5] \rangle$ och $[13]$ inte ligger i delgruppen $\langle [5] \rangle \times \langle [7] \rangle$.

c). Vi har att antalet element i en konjugatklass är lika med antalet element i en bana när gruppen verkar på sig själv med konjugering. Det innebär att antalet element är lika med

$$\frac{|G|}{C_G(g)}$$

Eftersom centret, $Z(G)$, ligger i centralisatorn för varje element $g \in G$ får vi att

$$\frac{|G|}{C_G(g)} \leq \frac{|G|}{Z(G)} = |G : Z(G)|,$$

vilket visar att $|G : Z(G)|$ begränsar antalet element i konjugatklassen till G uppåt.

d). Om vi ska finna en delgrupp H i S_4 som är isomorf med $Z_2 \times Z_4$ måste vi också finna två cykliska delgrupper av ordning 2, respektive 4, som kommuterar med varandra. Det finns upp till isomorfi bara en cyklisk delgrupp av ordning 4, nämligen $\langle(1234)\rangle$, så vi kan anta att den ena är denna. generatorn för den andra faktorn måste nu kommutera med (1234).

Det finns $6 = 3!$ permutationer av ordning fyra och eftersom detta utgör konjugatklassen till (1234) får vi $24/6 = 4$ permutationer som kommuterar med (1234), men detta är precis den delgrupp som genereras av (1234), och det finns därmed inget element av ordning två utanför denna som kommuterar med (1234). Alltså finns ingen delgrupp som är isomorf med $Z_2 \times Z_4$.

e). Vi har en homomofi från S_5 till den abelska gruppen $Z_2 = \{\pm 1\}$ som ges av tecknet för permutationerna. Alltså måste kommutatordelgruppen ligga i kärnan för denna homomorfi, dvs $[G, G] \subseteq A_5$. Vi vet att S_5 genereras av transpositionerna $s_1 = (12)$, $s_2 = (23)$, $s_3 = (34)$ och $s_4 = (45)$. Vi kan med hjälp av dessa bilda tre icke-triviala kommutatorer

$$[(12), (23)] = (12)(23)(12)(23) = (132) = (23)(12) = s_2 s_1$$
$$[(23), (34)] = (23)(34)(23)(34) = (243) = (34)(23) = s_3 s_2$$
$$[(34), (45)] = (34)(45)(34)(45) = (354) = (45)(34) = s_4 s_3$$

Vi kan nu bilda alla produkter av två av generatorerna med hjälp av dessa, och därmed genererar kommutatorerna hela A_5. Exempelvis har vi att

$$s_1 s_3 = (s_1 s_2)(s_2 s_3) = (s_2 s_1)^{-1}(s_3 s_2)^{-1}$$

och

$$s_1 s_4 = (s_1 s_2)(s_2 s_3)(s_3 s_4) = (s_2 s_1)^{-1}(s_3 s_2)^{-1}(s_4 s_3)^{-1}$$

Vi skulle också ha kunnat argumentera att A_5 är en enkel grupp och därmed inte innehåller några icke-triviala normala delgrupper. Eftersom kommutatordelgruppen är en icke-trivial normal delgrupp måste den vara hela A_5.

Bedömningskriterier.

a) Korrekt formulering av struktursatsen för ändliga abelska grupper, **1 poäng**

b)
- Korrekt beskrivning av den multiplikativa gruppen med rätt antal element, **1 poäng**
- Korrekt motiverad uppdelning av gruppen som en produkt av cykliska grupper, exempelvis genom hänvisning till att det är en elementär abelsk grupp av ordning $8 = 2^3$, **1 poäng**

c)
- Korrekt beskrivning av konjugatklassernas storlek med hjälp av centralisatorerna, $|G|/|C_G(g)|$, **1 poäng**
- Korrekt motiverad olikhet, $|G|/|C_G(g)| \leq |G : Z(G)$, **1 poäng**

d)
- Korrekt krav på att det ska finnas element av ordning två och fyra som kommuterar med varandra, **1 poäng**
- Korrekt motivering till att det enda elementet av ordning två kommuterar med ett element av ordning fyra är kvadraten av detta, **1 poäng**

e)
- Korrekt motivering att kommutatordelgruppen måste ligga i A_5, **1 poäng**
- Korrekt motivering till att kommutatordelgruppen är hela A_5, **1 poäng**