KTH Teknikvetenskap

SF2703 Algebra grundkurs
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 3
Fredagen den 6 mars, 2009

Uppgift.

a) Definiera vad som menas med att I är ett ideal i en ring R som inte nödvändigtvis är kommutativ. **(1)**

b) Låt $\Phi : R \longrightarrow S$ vara en ringhomomorfi, låt J vara ett ideal i S och låt

$$I = \Phi^{-1}(J) = \{a \in R \,|\, \Phi(a) \in J\}.$$

Visa att I är ett ideal i R. **(2)**

c) Visa att homomorfin Φ i uppgift b) inducerar en injektiv homomorfi

$$\Psi : R/I \longrightarrow S/J.$$

(2)

d) Visa att en oändlig kedja av ideal $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq I_4 \subseteq \cdots$ i ett principalidealområde R måste stabiliseras, dvs uppfyller $I_i = I_{i+1}$ alla tillräckligt stora heltal i. (*Ledning:* Visa först att unionen är ett ideal.) **(2)**

e) Ge ett exempel på en ring på formen $\mathbb{R}[x]/(f(x))$ som inte är isomorf med en produkt av kroppar. **(2)**

Lösningsförslag.

a). Ett ideal I i en ring R är en delmängd som uppfyller

$i)$ $I \subseteq R$ är en delgrupp under addition, och
$ii)$ $aI \subseteq I$ och $Ia \subseteq I$ för alla $a \in R$.

Vi kan också säga att I är en delring som uppfyller $ii)$.

b). Vi behöver kontrollera att I uppfyller kraven i uppgift a).

$i)$ Vi tar två element a och b i I och ser om $a - b$ ligger i I. Vi får att

$$\Phi(a - b) = \Phi(a) - \Phi(b) \in J,$$

eftersom $\Phi(a)$ och $\Phi(b)$ ligger i J som är ett ideal i S.

$ii)$ Vi ser sedan på $a \in R$ och $b \in I$. Då har vi att

$$\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b) \in J$$

och

$$\Phi(ba) = \Phi(b)\Phi(a) \in J,$$

eftersom $\Phi(b) \in J$ och J är ett ideal i S.

c). Vi definierar homomorfin $\Psi : R/I \longrightarrow R/J$ genom

$$\Psi(a + I) = \Phi(a) + J$$

för $a \in I$. Detta är väldefinierat eftersom $a - b \in I$ innebär att $\Phi(a) - \Phi(b) = \Phi(a - b) \in J$.

Vi ska nu visa att Ψ är injektiv. Vi gör det genom att beräkna kärnan.

$$\ker \Psi = \{a + I|\Psi(a + I) = 0\} = \{a + I|\Phi(a) \in J\} = \{a + I|a \in I\} = \{0\} \subseteq R/I.$$

Alltså är Ψ injektiv.

d). Vi kan bilda $I = \bigcup_{i=0}^{\infty} I_i$ som blir ett ideal eftersom $a, b \in I$ innebär att $a \in I_i$ och $b \in I_j$, för några i, j. Men då gäller att både I_i och I_j ligger i $I_{\max\{i,j\}}$. Alltså ligger skillnaden $a - b$ också i $I_{\max\{i,j\}}$ och därmed i I. Om a ligger i I får vi att $a \in I_i$ för något i och därmed kommer $ab \in I_i$ för varje $b \in R$. Alltså är I ett ideal.

Eftersom R är ett principalidealområde finns nu ett element $a \in R$ så att $I = (a)$. Detta element ligger i något I_i och därmed måste $I \subseteq I_i$. Eftersom $I = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ har vi också att $I_i \subseteq I$. Alltså är $I_i = I$ och vi måste ha $I_j = I$ för alla $j \geq i$, eftersom $I = I_i \subseteq I_j \subseteq I$.

e). Enligt kinesiska restsatsen kan vi faktorisera $\mathbb{R}[x]/(f(x))$ som en produkt av ringar av formen $\mathbb{R}[x]/(f_i(x))$ där $f = f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x)$ är en faktorisering av $f(x)$ i faktorer som är parvis relativt prima. Kvoten $\mathbb{R}[x]/(f(x))$ är en kropp om och endast om $f(x)$ är irreducibel, så om vi vill ha en ring som inte är en produkt av kroppar skulle vi behöva upprepade faktorer i $f(x)$. Till exempel kan vi välja $R = \mathbb{R}[x]/(x^2)$.

För att vara säker på att R inte är isomorf med en produkt av kroppar på något annat sätt kan vi se att R innehåller ett nollskilt element vars kvadrat är noll. Om vi har en produkt av kroppar är alla potenser av nollskilda element nollskilda. Alltså kan inte $R = \mathbb{R}[x]/(x^2)$ vara isomorf med en produkt av kroppar.

Bedömningskriterier.

a) Korrekt definition av ideal, **1 poäng**.

b)
- Korrekt bevis för att I är en abelsk delgrupp av R under addition, **1 poäng**.
- Korrekt bevis för att $aI \subseteq I$ och $Ia \subseteq I$ för alla $a \in R$, **1 poäng**.

c)
- Korrekt motivering för att man får en inducerad homomorfi, **1 poäng**.
- Korrekt motivering för att homomorfin blir injektiv, **1 poäng**.

d)
- Korrekt motivering för att unionen $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ är ett ideal, **1 poäng**.
- Korrekt motivering till att $I_i = I$ för $i >> 0$, **1 poäng**.

e)
- Korrekt exempel på en ring där $f(x)$ har en upprepad faktor, **1 poäng**.
- Korrekt bevis av att ringen inte är en produkt av kroppar i detta fall, **1 poäng**.