KTH Teknikvetenskap

SF2703 Algebra grundkurs
Lösningsförslag till tentamen
Fredagen den 14 mars 2008

---

(1) a) Definiera vad som menas med en grupphomomorfi. **(1)**

b) Visa att en grupphomomorfi $\Phi : G \longrightarrow H$ är injektiv om och endast om kärnan är trivial, dvs $\ker\Phi = \{e\}$. **(2)**

c) Beräkna normalisatorn till $\{r, s\}$ i dihedrala gruppen D_{2n}, där r har ordning n och s har ordning 2. **(2)**

d) Visa att det finns en injektiv homomorfi

$$\Psi : G/H \cap K \longrightarrow G/H \times G/K$$

om H och K är normala delgrupper i en grupp G. **(2)**

e) Låt G vara en grupp och H vara den delgrupp som genereras av mängden

$$\{hgh^{-1}g^{-1} | g, h \in G\}.$$

Visa att H är normal i G. **(2)**

---

a). En grupphomomorfi $\Phi : G \longrightarrow H$ är en funktion mellan grupper som uppfyller

$$\Phi(g *_G g') = \Phi(g) *_H \Phi(g')$$

för alla g och g' i G, där $*_G$ och $*_H$ är gruppoperationerna i G, respektive H.

b). Vi har alltid att $\Phi(e_G) = e_h$. Om homomorfin är injektiv måste vi ha att endast e_G avbildas på e_H, vilket ger att kärnan är trivial. Om vi vet att kärnan är trivial och $\Phi(g) = \Phi(g')$ får vi att

$$\Phi(g^{-1}g')\Phi(g)^{-1}\Phi(g') = e_H$$

vilket leder till $g^{-1}g' = e_G$, dvs $g = g'$. Alltså är homomorfin injektiv.

c). Vi kan skriva ett element i $G = D_{2n}$ som $g = r^i s^j$ där $0 \le i < n$ och $0 \le j \le 1$. Om $n > 2$ kan inte r och s vara konjugerade med varandra eftersom de har olika ordning. Alltså ges normalisatorn till $\{r, s\}$ av skärningen mellan $N_G(r)$ och $N_G(s)$. För att g ska ligga i $N_G(r)$ behöver vi att

$$r = grg^{-1} = r^i s^j r s^{-j} r^{-i} = r^i r^{(-1)^j} s^j s^{-j} r^{-i} = r^{i+(-1)^j-i} = r^{(-1)^j}$$

vilket betyder att $j = 0$. Vi kan nu anta att $g = r^i$ vi får att g ligger i $N_G(s)$ om

$$s = gsg^{-1} = r^i s^j s s^{-j} r^{-i} = r^i s r^{-i} = r^{2i} s,$$

vilket betyder att $r^{2i} = e$. Alltså får vi att normalisatorn till $\{r, s\}$ är trivial om n är udda och lika med $\{e, r^{n/2}\}$ om n är jämnt. Om $n = 2$ har vi att $D_4 \cong Z_2 \times Z_2$ är abelsk och normalisatorn till $\{r, s\}$ är därmed hela D_4.

d). Vi kan definiera kvotgrupperna G/H och G/K eftersom H och K är normala i G. Vi får också naturliga homomorfier

$$\phi_1 : G \longrightarrow G/H \quad \text{och} \quad \phi_2 : G \longrightarrow G/K$$

som ges av att $\phi_1(g) = g + H$ och $\phi_2(g) = g + K$. Därmed får vi en homomorfi

$$\Phi : G \longrightarrow G/H \times G/K$$

genom $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$, dvs $\Phi(g) = (\phi_1(g), \phi_2(g)) = (g + H, g + K)$. Detta är en homomorfi eftersom ϕ_1 och ϕ_2 är homomorfier och vi får att kärnan ges av de element i G som går på identitetselementet i båda faktorerna, dvs de element som ligger både i H och i K. Alltså är $\ker \Phi = H \cap K$ och enligt den första isomorfisatsen är $G/\ker \Phi \cong \mathrm{im}\Phi$, vilket visar att $G/H \cap K$ är isomorf med en delgrupp i $G/H \times G/K$. Alltså finns en injektiv homomorfi $G/H \cap K \longrightarrow G/H \times G/K$.

e). Om k är ett element i G har vi att

$$khgh^{-1}g^{-1}k^{-1} = khk^{-1}kgk^{-1}kh^{-1}k^{-1}kg^{-1}k^{-1} = h'g'h'^{-1}g'^{-1}$$

där $h' = khk^{-1}$ och $g' = kgk^{-1}$. Alltså är mängden $A = \{hgh^{-1}g^{-1} | h, g \in G\}$ sluten under konjugering, dvs $N_G(A) = G$. Eftersom A är sluten under invers, kommer varje element i $H = \langle A \rangle$ att vara en produkt av ett ändligt antal element ur A och vi har därmed att

$$ka_1a_2 \cdots a_n k^{-1} = ka_1k^{-1}ka_2k^{-1} \cdots ka_nk^{-1} = a'_1a'_2 \cdots a'_n$$

för $a'_i = ka_ik^{-1} \in A$, som därmed också ligger i H för alla k i G.

Bedömningskriterier.

a) Korrekt definition av grupphomomorfi, **1 poäng**.

b)
- Korrekt bevis av ena implikationen, **1 poäng**.
- Korrekt bevis av andra implikationen, **1 poäng**.

c)
- Korrekt krav för att $grg^{-1} \in \{r, s\}$, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av normalisatorn, **1 poäng**.

d)
- Korrekt definition av homomorfin från G till $G/H \times G/K$, **1 poäng**.
- Korrekt slutfört bevis av att det finns en injektiv homomorfi, **1 poäng**.

e)
- Korrekt bevis för att generatormängden är sluten under konjugering, **1 poäng**.
- Korrekt slutfört bevis av att H är normal, **1 poäng**.

---

(2) a) Definiera vad som menas med gruppen av inre automorfier av en grupp. **(1)**
b) Formulera struktursatsen för ändligt genererade abelska grupper och avgör om $Z_{42} \times Z_{12}$ är isomorf med $Z_{84} \times Z_6$. **(2)**
c) Härled klassekvationen för ändliga grupper. **(2)**
d) Bestäm en p-Sylowdelgrupp till den symmetriska gruppen S_4 för alla primtal som delar gruppens ordning. **(2)**
e) Låt G vara en ändlig grupp och p vara ett primtal som delar ordingen av G. Visa att skärningen av alla p-Sylowdelgrupper är en normal delgrupp i G. **(2)**

---

a). Varje element g i G definierar en automorfi på G genom $\phi_g(h) = ghg^{-1}$. Mängden av dessa automorfier bildar en delgrupp av automorfigruppen $\mathrm{Aut}(G)$ som kallas gruppen av inre automorfier.

b). En ändligt genererad abelsk grupp A vär en produkt av cykliska grupper. Mer precist gäller att

i) Det finns naturliga tal r och $n_1, n_2, \ldots, n_k$, där n_{i+1} delar n_i, för $1 \leq i < k$, så att

$$A \cong Z^r \times Z_{n_1} \times Z_{n_2} \times \cdots \times Z_{n_k}.$$

ii) Heltalen r, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ är unik bestämda utifrån egenskapen i i).

För att avgöra om de två grupperna är isomorfa skriver vi om den första på normalformen genom att först separera de olika primfaktorerna:

$$Z_{42} \times Z_{12} \cong Z_7 \times Z_3 \times Z_2 \times Z_3 \times Z_4 \cong Z_{7\cdot 3\cdot 4} \times Z_{3\cdot 2} = Z_{84} \times Z_6.$$

Alltså ser vi att grupperna är isomorfa.

c). Om G är en ändlig grupp verkar den på sig själv genom konjugering. Banorna kallas konjugatklasser och vi har för varje element g att antalet element i konjugatklassen ges av

$$|G| = |G_g| \cdot |Gg|$$

vilket ger att antalet element i konjugatklassen ges av $|G|/|C_G(g)|$. Konjugatklasserna är disjunkta och ger en partition av G. De konjugatklasser som innehåller precis ett element motsvarar centret $Z(G)$ och därmed får vi att totala antalet element i G får som antalet element i centret plus summan av antalet element i de olika konjugatklasserna. Detta kan vi skriva som

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=i}^{k} \frac{|G|}{|C_G(g_i)|},$$

där $g_1, g_2, \ldots, g_k$ är representanter för de konjugatklasser som innehåller fler än ett element.

d). Eftersom $|S_4| = 24 = 2^3 \cdot 3$ har vi endast de två primtalen $p = 2$ och $p = 3$ att utreda. I det första fallet letar vi efter delgrupper av ordning $8 = 2^3$ och vi vet att det ska finnas minst en sådan delgrupp enligt Sylows sats. Elementen kan ha ordning 2 och 4. Vi kan inte ha två transpositioner med precis ett gemensamt element, eftersom vi då får en trecykel. Därmed finns inte plats för sju element av ordning två. Däremot kan vi om vi börjar med en fyrcykel $(abcd)$ ta

$$\{\mathrm{id}, (abcd), (ac)(bd), (adcb), (ac), (bd), (ab)(cd), (ad)(bc)\}$$

som vi känner igen som den dihedrala gruppen av symmetrier av en fyrhörning med hörnen a, b, c, d. Det finns tre olika varianter att välja numreringen av hörnen för att få olika delgrupper i S_4, genom $(abcd) = (1234)$, $(abcd) = (1243)$ eller $(abcd) = (1324)$.

För $p = 3$ letar vi efter delgrupper av ordning 3 och varje trecykel (abc) genererar en sådan delgrupp. Det finns åtta olika trecykler, men de genererar parvis samma delgrupp. Alltså har vi $\langle(123)\rangle$, $\langle(124)\rangle$, $\langle(134)\rangle$ och $\langle(234)\rangle$.

e). Vi låter K vara skärningen av alla p-Sylowdelgrupper i G. Om g ligger i K ligger g i alla p-Sylowdelgrupper. Om h är ett godtyckligt element i G får vi att hgh^{-1} ligger i alla p-Sylowdelgrupper, eftersom konjugering med h permuterar p-Sylowdelgrupperna. Alltså ligger hgh^{-1} också i K, vilket visar att K är en normal delgrupp i G.

Bedömningskriterier.

a) Korrekt definition av gruppen av inre automorfier, **1 poäng**.

b) – Korrekt formulering av struktursatsen, **1 poäng**
   – Korrekt motivering till att grupperna är isomorfa, **1 poäng**

c) – Korrekt förklaring av partitionen av G i konjugatklasser, **1 poäng**
   – Korrekt slutförd härledning av klassekvationen, **1 poäng**

d) – Korrekt 2-Sylowdelgrupp, **1 poäng**.
   – Korrekt 3-Sylowdelgrupp, **1 poäng**

e) Korrekt bevis av att skärningen är normal, **2 poäng**.

---

(3) a) Definiera vad som menas med ett område med unik faktorisering. **(1)**
b) Låt I och J vara ideal i en kommutativ ring R. Visa att $IJ \subseteq I \cap J$, men att inte nödvändigtvis $I \cap J \subseteq IJ$. **(2)**
c) Visa att fraktionskroppen till $\mathbb{Z}[3\sqrt{5}] = \{a + 3b\sqrt{5} | a, b \in \mathbb{Z}\}$ är

$$\mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} | a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

(2)
d) Låt R vara en kommutativ ring med etta och låt N vara mängden av nilpotenta element i R, dvs $N = \{a \in R | a^n = 0,\ n >> 0\}$. Visa att N är ett ideal i R och att kvotringen R/N saknar nilpotenta element. **(2)**
e) Bestäm samtliga nolldelare i ringen $\mathbb{Q}[x]/(x^4 - 1)$. **(2)**

---

a). Ett integritetsområde R har unik faktorisering om varje nollskilt element som inte är inverterbart kan skrivas som en produkt av irreducibla element, där dessa irreducibla element är unikt bestämda upp till permutation och multiplikation med inverterbara element. (Ett irreducibelt element är ett element som inte är inverterbart och som inte går att skriva som en produkt av två element som inte är inverterbara)

b). Ett element i IJ kan skrivas som $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$ där $a_1, a_2, \ldots, a_n \in I$ och $b_1, b_2, \ldots, b_n \in J$. Eftersom I är ett ideal ligger $a_i b_i$ i I eftersom $a_i \in I$. På samma sätt ligger $a_i b_i$ i J eftersom $b_i \in J$. Därmed ligger varje term i $I \cap J$ och alltså även summan.

För att få ett exempel där IJ ligger strikt innehållet i $I \cap J$ kan vi ta $I = (2)$ och $J = (4)$ i $R = \mathbb{Z}$. Produkten av idealen är $IJ = (2)(4) = (8)$, medan skärningen är $I \cap J = (2) \cap (4) = (4)$ eftersom $(4) \subseteq (2)$.

c). Vi kan se att $\mathbb{Z}[3\sqrt{5}]$ är en delring av $\mathbb{R}$ genom att se att den är sluten under addition och multiplikation:

$$(a + 3b\sqrt{5}) + (c + 3d\sqrt{5}) = (a + b) + 3(c + d)\sqrt{5}$$

och

$$(a + 3b\sqrt{5}) \cdot (c + 3d\sqrt{5}) = (ac + 5bd) + 3(ad + bc)\sqrt{5}.$$

Det är klart att alla element i $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ måste ligga i en kropp som innehåller $\mathbb{Z}[3\sqrt{5}]$ eftersom 1 och $3\sqrt{5}$ genererar hela $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ som vektorrum över $\mathbb{Q}$.

Alltså räcker det att visa att $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ är en kropp. Vi vet redan att det är en kommutativ ring med etta eftersom det är en delring av de reella talen. Det räcker därför att visa att nollskilda element är inverterbara

$$(a + b\sqrt{5})^{-1} = \frac{a - b\sqrt{5}}{a^2 - 5b^2}$$

som ligger i $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$. Observera att $a^2 - 5b^2$ inte kan vara noll om a och b är rationella tal på grund av att vi har unik faktorisering i $\mathbb{Z}$ och 5 är ett irreducibelt element.

d). Vi behöver se att N är en additiv delgrupp, dvs att $(a-b) \in N$ om $a, b \in N$. Givet a och b i N finns ett heltal n så att både $a^n = 0$ och $b^n = 0$. Därmed har vi att

$$(a-b)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} a^k b^{2n-k} = 0$$

eftersom varje term antingen är delbar med a^n eller med b^n.

Vi behöver sedan se att $aN \subseteq N$ för alla a i R. Om $b^n = 0$ har vi att $(ab)^n = a^n b^n = 0$, vilket visar att $ab \in N$ om $b \in N$. Därmed är N ett ideal i R.

Om $a + N$ är ett nolpotent element i R/N så gäller att $a^n + N = N$, dvs att $a^n \in N$, men då är $(a^n)^m = 0$ för något m vilket visar att $a^{mn} = 0$ och $a \in N$. Alltså är 0 det enda nilpotenta elementet i R/N.

e). Vi kan faktorisera x^4-1 som $(x^2+1)(x+1)(x-1)$ där alla faktorer är irreducibla eftersom x^2+1 saknar nollställen i $\mathbb{Q}$. Enligt kinesiska restsatsen har vi därmed att

$$\mathbb{Q}[x]/(x^4-1) \stackrel{\sim}{=} \mathbb{Q}[x]/(x^2+1) \times \mathbb{Q}[x]/(x+1) \times \mathbb{Q}[x]/(x-1) \stackrel{\sim}{=} \mathbb{Q}[i] \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}.$$

Eftersom alla tre faktorer är kroppar är nolldelarna precis de element som är noll i någon av faktorerna, vilket betyder element i $Q[x]/(x^4-1)$ som är delbara med någon av faktorerna (x^2+1), $(x+1)$ eller $(x-1)$, dvs polynom $p(x)$ som har nollställen i någon av punkterna $1, i, -1, -i$, men inte i alla.

Bedömningskriterier.

a) Korrekt definition av område med unik faktorisering, **1 poäng**.

b)
- Korrekt bevis av att $IJ \subseteq I \cap J$, **1 poäng**
- Korrekt exempel på när $IJ \neq I \cap J$, **1 poäng**

c)
- Korrekt motivering till att $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ är en kropp, **1 poäng**
- Korrekt motivering till varför $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ är fraktionskroppen till $\mathbb{Z}[3\sqrt{5}]$, **1 poäng**

d)
- Korrekt bevis av att N är ett ideal, **1 poäng**
- Korrekt bevis av att bara 0 är nilpotent i R/N, **1 poäng**

e)
- Korrekt beskrivning av ringen som en produkt av tre kroppar, **1 poäng**
- Korrekt beskrivning av nolldelarna i ringen,**1 poäng**
