



KTH Teknikvetenskap

SF2703 Algebra grundkurs
Lösningsförslag med bedömningskriterier till tentamen
Måndagen den 9 mars 2009

- (1) a) Definiera vad som menas med centralisatorn till ett element g i en grupp G . (1)
b) Visa att om H är en normal delgrupp i en grupp G så finns det en naturlig surjektiv homomorfi $G \rightarrow G/H$ vars kärna är H . (2)
c) Fyll i resterande element i grupptabellen

*	u	v	w	x	y	z
u	w				v	
v		x				
w				w		
x	u					
y					u	
z			y			

- och motivera noggrant. (2)
d) Ge ett exempel där den symmetriska gruppen S_n verkar på en mängd X så att den alternerande gruppen A_n är stabilisatorn för något element x i X . (2)
e) Visa att gruppen G måste vara abelsk om $G/Z(G)$ är cyklisk. (2)
-

a). Centralisatorn, $C_G(g)$, till ett element g i G ges av

$$C_G(g) = \{g \in G \mid hg = gh, \quad \forall h \in G\},$$

dvs delmängden av alla element i G som kommuterar med g . Vi kan också skriva $hgh^{-1} = g$ istället för $hg = gh$.

b). Vi kan definiera $\Phi : G \rightarrow G/H$ genom

$$\Phi(g) = gH, \quad \forall g \in G.$$

Detta är en homomorfi eftersom

$$\Phi(gh) = ghH = ghHH = gHhH = \Phi(g)\Phi(h), \quad \forall g, h \in G,$$

eftersom H är normal och därmed $hH = Hh$, för alla $h \in G$. Homomorfin är surjektiv per definition, och kärnan ges av

$$\ker \Phi = \{g \in G \mid gH = H\} = \{g \in G \mid g \in H\} = H,$$

vilket skulle visas.

c). Till att börja med kan vi identifiera identitetselementet, e , genom att se att $wx = w$, vilket innebär att $x = e$, efter multiplikation till vänster med w^{-1} . Alltså kan vi fylla i raden och kolonnen som hör till $x = e$ och får då

$*$	u	v	w	x	y	z
u	w			u	v	
v		x		v		
w				w		
x	u	v	w	x	y	z
y				y	u	
z			y	z		

Eftersom gruppens ordning är 6, vet vi att elementens ordning kan vara 1, 2, 3 eller 6 och eftersom $u^2 = w \neq e$, måste u ha ordning tre eller sex.

Om ordningen av u är sex är gruppen cyklisk och det finns bara ett element av ordning två som därmed måste vara $u^3 = v$. Därmed måste y och z vara u^4 och u^5 i någon ordning, men vi har att $yz = u$, enligt tabellen vilket motsäger att $yz = u^4u^5 = u^9 = u^3$. Alltså kan inte ordningen av u vara sex.

Vi vet nu att u har ordning tre och vi får $uw = wu = e$. Därmed är också w ordning tre och $w^2 = w^{-1} = u$. När vi fyller i detta får vi

$*$	u	v	w	x	y	z
u	w		x	u	v	
v		x		v		
w	x		u	w		
x	u	v	w	x	y	z
y				y	u	
z			y	z		

I första raden fattas bara y och z . Eftersom z redan finns med i sista kolonnen måste $uv = z$ och $uz = y$. På samma sätt fattas y och z i tredje kolonnen, och vi får $vw = z$ och $yw = v$. Vi har nu fått

$*$	u	v	w	x	y	z
u	w	z	x	u	v	y
v		x	z	v		
w	x		u	w		
x	u	v	w	x	y	z
y			v	y	u	
z			y	z		

I tre av raderna saknas nu tre element, men vi kan i alla tre fallen bara sätta dem på ett sätt så att inte ett element förekommer två gånger i en kolonn. När vi väl gjort detta blir

den sista raden given. Resultatet blir:

*	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>w</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
<i>u</i>	<i>w</i>	<i>z</i>	<i>x</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>y</i>
<i>v</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>z</i>	<i>v</i>	<i>u</i>	<i>w</i>
<i>w</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>u</i>	<i>w</i>	<i>z</i>	<i>v</i>
<i>x</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>w</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
<i>y</i>	<i>z</i>	<i>w</i>	<i>v</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>u</i>
<i>z</i>	<i>v</i>	<i>u</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>w</i>	<i>x</i>

Vi skulle också ha kunnat använda oss av kunskapen att det bara finns en icke-cyklisk grupp av ordning 6 upp till isomorfi, S_3 , för att förenkla räkningarna något. Efter att ha identifierat u och w som element av ordning 3, vet vi att v , y och z måste vara transpositionerna.

d). I och med att A_n har index två i S_n måste banan till ett element som har stabilisator A_n innehålla två element. Vi kan lika gärna ersätta X med denna bana och ser då att vi kan välja en mängd X med två element. A_n fixerar nu det ena elementet, men då måste även det andra elementet fixeras. De udda permutationerna ska inte fixera något av elementen. Vi ser att vi kan låta X vara $\{\pm 1\}$ och låta S_n verka genom multiplikation med tecknet på permutationen

$$\sigma.x = \text{sgn}\sigma \cdot x, \quad x \in \{\pm 1\}$$

Ett annat sätt som fungerar i allmänhet för en delgrupp H i en grupp G är att låta G verka på vänstersidoklasserna till H , dvs

$$g.hH = (gh)H.$$

Då fixeras sidoklassen $H = eH$ precis av H , eftersom $gH = H$ om och endast om $g \in H$. Alltså kan vi låta S_n verka på $X = S_n/A_n$ på detta sätt och få stabilisatorn A_n till den triviala sidoklassen.

e). Om $G/Z(G)$ är cyklisk kan den genereras av ett enda element, säg $gZ(G)$. Vi får då att

$$G/Z(G) = \langle gZ(G) \rangle = \{g^i Z(G) \mid i \in \mathbb{Z}\}.$$

Eftersom unionen av sidoklasserna till $Z(G)$ är hela G betyder det att alla element kan skrivas som

$$g^i z, \quad i \in \mathbb{Z}, z \in Z(G),$$

men två godtyckliga sådana element kommuterar med varandra eftersom

$$(g^i z)(g^j z') = g^i g^j z z' = g^j g^i z' z = (g^j z')(g^i z),$$

där vi använt att $g^i g^j = g^{i+j} = g^j g^i$ och att $z, z' \in Z(G)$. Alltså är G abelsk och i själva verket är $Z(G) = G$ och $G/Z(G) = \{e\}$.

Bedömningskriterier.

- a) Korrekt definition av centralisatorn, **1 poäng**.
 - b) – Korrekt konstruktion av homomorfin inklusive kontroll att det är en homomorfi, **1 poäng**
– Korrekt motivering till att kärnan är H , **1 poäng**
 - c) – Korrekt ifylld tabell, **1 poäng**
– Korrekt utförlig motivering till tabellen, **1 poäng**
 - d) – Korrekt exempel, **1 poäng**
– Korrekt motivering till att stabilisatorn är A_n , **1 poäng**
 - e) – Korrekt slutsats om att det finns ett $g \in G$ så att elementen i G kan skrivas $g^i z$, för $i \in \mathbb{Z}$, $z \in Z(G)$, **1 poäng**
– Korrekt slutförd motivering till att G är abelsk, **1 poäng**
-

- (2) a) Definiera vad som menas med en p -grupp. (1)
- b) Låt p vara ett primtal. Använd klassekvationen för att visa att centret i en p -grupp inte kan vara trivialt. (2)
- c) Låt H och K vara normala delgrupper i en grupp G . Visa att $G/(H \cap K)$ är abelsk om G/H och G/K båda är abelska. (Ledning: Se på homomorfin $G \rightarrow (G/H) \times (G/K)$). (2)
- d) Låt A vara en ändlig abelsk grupp och p ett primtal som delar ordningen av A . Visa att kärnan till homomorfin, $\Phi : A \rightarrow A$, som ges av $\Phi(a) = a^p$, är p -delgrupp. (Ledning: Använd struktursatsen för ändliga abelska grupper.) (2)
- e) Låt G vara symmetrigruppen för en dodekaeder. Det är känt att $|G| = 60$. Bestäm antalet 3- och 5-Sylowdelgrupper till G . (2)

a). Om p är ett primtal är G en p -grupp om $|G| = p^n$ för något heltal $n > 0$.

b). Antag att $|G| = p^n$, för något positivt heltal n . Enligt klassekvationen är nu

$$p^n = |G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^s \frac{p^n}{|C_G(g_i)|}$$

där g_1, g_2, \dots, g_s är representanter för de icke-triviala konjugatklasserna. Därmed är alla dessa termer delbara med p , liksom vänsterledet. Alltså måste även $|Z(G)|$ vara delbart med p och vi kan inte ha $Z(G) = \{e\}$, vilket skulle visas.

c). Vi kan definiera en homomorfi

$$G \rightarrow (G/H) \times (G/K)$$

genom $\Phi(g) = (gH, gK)$ för alla g i G . Kärnan till denna homomorfi ges av

$$\ker \Phi = \{g \in G \mid gH = H, gK = K\} = \{g \in G \mid g \in H, g \in K\} = H \cap K.$$

Enligt första isomorfisatsen har vi att $G/(H \cap K) \cong \text{im} \Phi$, men denna måste vara abelsk om G/H och G/K är abelska eftersom $\text{im} \Phi$ är en delgrupp av $(G/H) \times (G/K)$ som i så fall är abelsk.

d). Enligt struktursatsen för ändliga abelska grupper kan vi skriva A som en produkt av cykliska grupper:

$$A \cong Z_{n_1} \times Z_{n_2} \times \dots \times Z_{n_s}.$$

Det räcker nu att visa påståendet för en cyklisk grupp eftersom kärnan till $\Phi : A \rightarrow A$ är produkten av kärnorna till motsvarande homomorfier $\Phi_i : Z_{n_i} \rightarrow Z_{n_i}$, $i = 1, 2, \dots, s$. Eftersom $|A|$ är delbart med p är n_1 delbart med p . Om n_i inte är delbart med p måste $\Phi_i : Z_{n_i} \rightarrow Z_{n_i}$ vara en isomorfi, eftersom det inte kan finnas något element av ordning p i Z_{n_i} . Om n_i är delbart med p finns precis p element av ordning p i Z_{n_i} . Alltså är kärnan till Φ en produkt av cykliska grupper av ordning p och därmed en p -delgrupp till A .

Vi kan också argumentera genom att $B = \ker \Phi$ är en delgrupp där alla element uppfyller $x^p = e$. Alltså kan det inte finnas någon annan primtalsfaktor än p i ordningen till B , eftersom det då enligt Cauchys sats skulle finnas element av ordning q , men

$x^p = x^q = e$ innebär att $x = e$, om p och q är olika primtal. Det räcker nu att se att Cauchys sats säger att B inte kan vara trivial, eftersom det finns minst ett element av ordning p i A och detta ligger också i B .

e). Antalet 3-Sylowdelgrupper ska vara kongruent med 1 modulo 3 och en delare i 20. För varje par av motstående hörn i dodekaedern finns rotationer av ordning tre som bevarar dodekaedern. Det innebär att det finns minst tio 3-Sylowdelgrupper, eftersom antalet hörn är 20, men det finns inga större delare i 20 som är kongruenta med 1 modulo 3. Alltså finns precis tio 3-Sylowdelgrupper i G .

Antalet 5-Sylowdelgrupper ska vara kongruent med 1 modulo 5 och en delare i 12. Därmed kan det antingen vara 1 eller 6. För varje par av motstående sidor finns rotationer av ordning fem som bevarar dodekaedern. Därmed finns minst sex 5-Sylowdelgrupper. Alltså finns precis sex 5-Sylowdelgrupper i G .

Bedömningskriterier.

- a) Korrekt definition av p -grupp, **1 poäng**.
- b)
 - Korrekt formulerad klassekvation, **1 poäng**
 - Korrekt motivering till att p delar $|Z(G)|$, **1 poäng**
- c)
 - Korrekt motivering till att kärnan till homomorfin är $H \cap K$, **1 poäng**
 - Korrekt slutfört bevis av att gruppen är abelsk, **1 poäng**
- d)
 - Korrekt motivering till att kärnan är cyklisk av ordning p för varje cyklisk faktor, **1 poäng**
 - Korrekt slutfört bevis av att kärnan är en p -delgrupp, **1 poäng**
- e)
 - Korrekt motiverat antal 3-Sylowdelgrupper, **1 poäng**
 - Korrekt motiverat antal 5-Sylowdelgrupper, **1 poäng**

- (3) a) Definiera vad som menas med en skevkropp (divisionsring). (1)
 b) Visa att en homomorfi från en kropp till en ring antingen är injektiv eller trivial, dvs noll för alla element. (2)
 c) Låt R vara en kommutativ ring med etta. Visa att ett ideal I i R är ett äkta ideal om och endast om 1 inte ligger i I . (2)
 d) Skriv $\mathbb{Z}[i]/(1 + 11i)$ som en produkt av kroppar. (2)
 e) Låt G vara en cyklisk grupp av ordning n och låt k vara en kropp. Visa att gruppringen $k[G]$ är isomorf med $k[x]/(x^n - 1)$. (2)
-

a). En skevkropp är en ring med etta där varje element utom noll är inverterbart.

b). Låt $\Phi : k \rightarrow R$ vara en homomorfi från en kropp k till en ring R . Då är $\ker \Phi$ ett ideal i k . En homomorfi är injektiv om och endast om dess kärna är trivial. Om Φ inte är injektiv finns alltså ett nollskilt element $a \in \ker \Phi$, men eftersom k är en kropp är a inverterbart och $(a) = (1) = k$. Alltså är $\ker \Phi = k$ och Φ är konstant noll, dvs trivial.

c). Om I är ett äkta ideal kan inte 1 ligga i I eftersom vi då har $I \supseteq (1) = R$, vilket motsäger att I är äkta. Om 1 inte ligger i I så är $I \neq R$ och därmed är I ett äkta ideal.

d). De Gaussiska heltalen är ett område med unik faktorisering och vi kan faktorisera $1 + 11i$ i irreducibla faktorer. Genom att titta på normen $N(1 + 11i) = 1^2 + 11^2 = 122 = 2 \cdot 61$. Eftersom både 2 och 61 är primtal är den enda möjligheten till att $1 + 11i$ inte är irreducibelt att det är en produkt av två irreducibla element med norm 2 och 61 . Det finns fyra Gaussiska heltal med norm 2 , och dessa skiljer bara genom multiplikation med enheter; $(1 + i)$, $-1 + i$, $-1 - i$ och $1 - i$. Det räcker därmed att se om $1 + 11i$ är delbart med $1 + i$. Vi provar och ser att $1 + 11i = (1 + i)(6 + 5i)$. Eftersom detta är en faktorisering av $1 + 11i$ i irreducibla faktorer får vi enligt kinesiska restsatsen att

$$\mathbb{Z}[i]/(1 + 11i) \cong \mathbb{Z}[i]/(1 + i) \times \mathbb{Z}[i]/(6 + 5i)$$

där faktorerna är kroppar eftersom $1 + i$ och $6 + 5i$ är irreducibla element i $\mathbb{Z}[i]$. (Vi kan också se att $\mathbb{Z}[i]/(1 + i) \cong \mathbb{Z}_2$ och $\mathbb{Z}[i]/(6 + 5i) \cong \mathbb{Z}_{61}$, exempelvis genom att räkna antalet element i kvoterna. Därmed får vi att $\mathbb{Z}[i]/(1 + 11i) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{61}$.)

e). Om $G = \langle g \rangle$ så kan vi skriva $G = \{g^0, g^1, \dots, g^{n-1}\}$. Elementen i gruppringen $k[G]$ är därmed linjärkombinationer

$$a_0g^0 + a_1g^1 + \dots + a_{n-1}g^{n-1}$$

där a_0, a_1, \dots, a_{n-1} är element i k . Vi ser att dessa ser ut som polynom och det är naturligt att se om det går att definiera en ringhomomorfi

$$\Phi : k[x] \rightarrow k[G]$$

genom

$$\Phi(a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m) = a_0 + a_1g + \dots + a_mg^m,$$

som vi också skulle kunna skriva $\Phi(f(x)) = f(g)$. På grund av att multiplikationen i $k[G]$ bygger på att $g^i g^j = g^{i+j}$ och att additionen sker termvis får vi att

$$\Phi(f(x) + h(x)) = f(g) + h(g) = \Phi(f(x)) + \Phi(h(x))$$

och

$$\Phi(f(x) \cdot h(x)) = f(g) \cdot h(g) = \Phi(f(x)) \cdot \Phi(h(x)),$$

för polynom $f(x), h(x) \in k[x]$, dvs Φ är en homomorfi.

För att se att $k[G] \cong k[x]/(x^n - 1)$ räcker det nu enligt isomorfisatsen att se att Φ är surjektiv med kärna $(x^n - 1)$. På grund av utseendet av elementen i $k[G]$ ovan ser vi att Φ är surjektiv och att det inte kan finnas något polynom av grad lägre än n i kärnan. Däremot ser vi att $\Phi(x^n) = g^n = 1$, dvs $\Phi(x^n - 1) = 0$. Alltså måste $(x^n - 1)$ vara generatorm till $\ker \Phi$. (Ett ideal i en polynomring i en variabel över en kropp genereras av polynomet av lägsta grad i idealet.)

Bedömningskriterier.

- a) Korrekt definition av skevkropp, **1 poäng**.
- b) – Korrekt motivering till att kärnan är icke-trivial om homomorfin inte är injektiv, **1 poäng**
 – Korrekt motivering till att homomorfin är trivial om kärnan innehåller ett nollskilt element, **1 poäng**
- c) – Korrekt bevis för att ett äkta ideal inte innehåller ettan, **1 poäng**
 – Korrekt bevis för att ett ideal som inte innehåller ett är äkta, **1 poäng**
- d) – Korrekt faktorisering av $1 + 11i$, **1 poäng**
 – Korrekt användning av kinesiska restsatsen för att skriva ringen som en produkt av kroppar, **1 poäng**
- e) – Korrekt motiverad homomorfi $k[x] \longrightarrow k[G]$, **1 poäng**
 – Korrekt motivering till att kärnan är $(x^n - 1)$ och att detta leder till den önskade isomorfin, **1 poäng**