KTH Teknikvetenskap

SF2703 Algebra grundkurs
Lösningsförslag med bedömningskriterier till tentamen
Fredagen den 5 juni 2009

---

(1) a) Definiera vad som menas med en grupphomomorfi. **(1)**

b) Visa att exponentialfunktionen, $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$, är en grupphomomorfi, där $\mathbb{C}$ är de komplexa talen under addition och $\mathbb{C}^*$ är de nollskilda komplexa talen under multiplikation. Bestäm också kärnan till $\exp$. **(2)**

c) Visa att skärningen av normala delgrupper är en normal delgrupp och ge ett exempel som visar att unionen av två normala delgrupper inte behöver vara en normal delgrupp. **(2)**

d) Visa att det för två ändliga delgrupper H och K i en grupp G gäller att

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$$

genom att betrakta HK som en union av sidoklasser till K. **(2)**

e) Låt G vara symmetrigruppen av en tetraeder. Visa att G är isomorf med den alternerande gruppen, $A_4 = \ker(\mathrm{sgn} : S_4 \to \{\pm 1\})$. **(2)**

---

a). En grupphomomorfi är en funktion mellan två grupper, $\Phi : G \longrightarrow H$, som uppfyller

$$\Phi(g_1 *_G g_2) = \Phi(g_1) *_H \Phi(g_2),$$

för alla g_1, g_2 i G.

b). Enligt exponentiallagarna gäller att

$$\exp(z_1 + z_2) = e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_1} = \exp(z_1)\exp(z_2)$$

för alla z_1, z_2 i $\mathbb{C}$. Eftersom $* = +$ och $*_{\mathbb{C}^*} = \cdot$, betyder detta precis att $\exp$ är en grupphomomorfi $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$.

För att beräkna kärnan till $\exp$ behöver vi finna alla element $z \in \mathbb{C}$ sådana att $\exp(z ==$ 1, eftersom 1 är identitetselementet i $\mathbb{C}^*$. Lösningarna till $\exp(z) = 1$ ges av $z = 2\pi i n$ där n är ett godtyckligt heltal. Alltså är $\ker \exp = 2\pi i\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$.

Om vi vill bevisa exponentiallagen kan vi använda definitionen av $\exp$ som en analytisk funktion med potensserieutveckling $\exp(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i/i!$. Därmed får vi

$$\begin{aligned} \exp(z_1 + z_2) &= \sum_{i=0}^{\infty} \tfrac{(z_1+z_2)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} \tbinom{i}{j} z_1^j z_2^{i-j} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} \tfrac{1}{j!(i-j)!} z_1^j z_2^{i-j} = \sum_{i,j=0}^{\infty} \tfrac{z_1^j}{j!} \tfrac{z_2^i}{i!} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} z_1^i/i!\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} z_2^i/i!\right) \end{aligned}$$

där vi får ändra summationsordningen eftersom serien är absolutkonvergent.

Vi kan nu också använda detta för att se att $\exp(x+iy) = \exp(x)\exp(iy)$ där x, y är reella. Vidare kan vi se från potensserien att $\exp(iy) = \cos(y) + i\sin(y)$, och

$$\exp(x+iy) = 1 \iff \begin{cases} \exp(x) &= 1 \\ \cos(y) &= 1 \\ \sin(y) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &\in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases},$$

vilket visar att $\exp(z) = 1$ om och endast om $z \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

c). Låt $\{H_i\}_{i\in I}$vara en uppsättning normala delgrupper i en grupp G. Vi har då för varje element $h \in H = \bigcap_{i\in I} H_i$ att $h \in H_i$, för alla $i \in I$. Eftersom alla H_i är normala har vi att

$$ghg^{-1} \in H_i, \qquad \forall i \in I$$

och därmed är $ghg^{-1} \in \bigcap_{i\in I} H_i = H$. Alltså är skärningen $H = \bigcap_{i\in I} H_i$ en normal delgrupp.

För att se att unionen inte behöver vara en normal delgrupp räcker det att se på exempelvis $2\mathbb{Z}$ och $3\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}$. Vi har då att 2 och 3 ligger i unionen, men summan, $2 + 3 = 5$, ligger inte i unionen. Alltså är inte unionen $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ en delgrupp över huvud taget, och alltså inte heller en normal delgrupp.

d). Vi låter H och K vara ändliga delgrupper av en grupp G och ser på sidoklasserna till K, dvs $gK = \{gk | k \in K\}$ för olika element $g \in G$. Om $g \in H$ har vi att $gK \subseteq HK = \{hk | h \in H, k \in K\}$. Sidoklasserna är antingen identiska eller disjunkta, eftersom $gK = hK$ innbär att $gh^{-1} \in K$ och multiplikation med gh^{-1} till vänster ger en bijektion mellan hK och gK. Alla element i HK ligger i någon sidoklass till K, eftersom $hk \in hK$. Därmed ger sidoklasserna på formen hK, för $h \in H$, en partition av HK i sidoklasser till K. Vi behöver nu se hur många sidoklasser det är. För att göra det kan vi konstatera att H verkar på dessa sidoklasser genom multiplikation till vänster. Eftersom denna verkan är transitiv är antalet sidoklasser som ligger i HK lika med banans storlek. Vi kan räkna ut banan till sidoklassen K genom att se på stabilisatorn till denna sidoklass. Vi har att $hK = K$ precis om $h \in K$. Alltså ges stabilisatorn till K under verkan av H av $H \cap K$ och vi får antalet banor som

$$\frac{|H|}{|H \cap K|}$$

vilket ger att antalet element i HK ges av

$$|HK| = \frac{|H|}{|H \cap K|} \cdot |K| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$$

vilket skulle visas.

e). Låt G vara symmetrigruppen för tetraedern och se hur den verkar på de fyra hörnen $\{1, 2, 3, 4\}$. När vi fixerar ett hörn, kan de övriga hörnen bara permuteras cykliskt. Det betyder att alla symmetrier som fixerar ett hörn motsvarar jämna permutationer. Utöver identitetssymmetrin finns åtta sådana symmetrier. Dessa måste generera en delgrupp av A_4, men eftersom denna delgrupp innehåller mer än hälften av elementen i A_4 måste det vara hela A_4. Vi har nu tolv symmetrier av tetraedern som svarar mot jämna permutationer, men vi kan se att symmetrigruppen måste innehålla precis tolv element genom att se på identiteten

$$|G| = |Gx| \cdot |G_x|$$

för något av hörnen. Det finns fyra hörn som hörnet kan gå till och tre symmetrier som fixerar hörnet. Alltså är $|G| = 4 \cdot 3 = 12$. Vi har nu visat att G innehåller A_4 som en delgrupp, men innehåller lika många element som A_4. Alltså måste $G = A_4$.

Bedömningskriterier.

a) Korrekt definition av grupphomomorfi, **1 poäng**.

b)
- Korrekt motivering till att $\exp$ är en grupphomomorfi, **1 poäng**
- Korrekt bestämning av kärnan till $\exp$, **1 poäng**

c)
- Korrekt bevis för att skärningen av normala delgrupper är normal, **1 poäng**
- Korrekt exempel som visar att unionen inte behöver vara en normal delgrupp, **1 poäng**

d)
- Korrekt motivering till att HK delas in i sidoklasser till K, **1 poäng**
- Korrekt motivering till att antalet sidoklasser är $|H|/|H \cap K|$, **1 poäng**

e)
- Korrekt motivering till att G innehåller A_4, **1 poäng**
- Korrekt motivering till att $G = A_4$, **1 poäng**

---

(2) a) Definiera vad som menas med att en grupp G verkar på en mängd X. **(1)**

b) Visa att varje grupp G verkar på sig själv genom konjugering och att den bana som innehåller ett visst element g under denna verkan har storlek $|G|/|C_G(g)|$ om G är ändlig. **(2)**

c) Bestäm automorfigruppen till den cykliska gruppen Z_{10}. **(2)**

d) Bestäm vilka möjligheter det finns för a och b för att

$$Z_{34} \times Z_{24} \cong Z_a \times Z_b.$$

(2)

e) Visa att alla 5-Sylowdelgrupper i S_{20} är abelska. **(2)**

---

a). Att en grupp G verkar på en mängd X betyder att det finns en funktion

$$\phi : G \times X \longrightarrow X$$

som uppfyller

(a) $\phi(e, x) = x$ för alla $x \in X$, där $e \in G$ är identitetselementet,

(b) $\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x))$, för alla $g, h \in G$ och alla $x \in X$.

Ofta skriver vi $g.x$ istället för $\phi(g, x)$.

b). Vi börjar med att visa att

$$\phi(g, h) = ghg^{-1}, \qquad g, h \in G$$

definierar en gruppverkan av G på G.

(a) Till att börja med gäller att $\phi(e, h) = ehe^{-1} = h$, för alla $h \in G$.

(b) Sedan gäller att

$$\begin{aligned} \phi(g_1g_2, h) &= (g_1g_2)h(g_1g_2)^{-1} = g_1g_2hg_2^{-1}g_1^{-1} \\ &= g_1(g_2hg_2^{-1})g_1^{-1} = \phi(g_1, \phi(g_2, h)) \end{aligned}$$

för alla g_1, g_2 och h i G, där vi använt att $(g_1g_2)^{-1} = g_2^{-1}g_1^{-1}$ eftersom $g_2^{-1}g_1^{-1}g_1g_2 = g_2^{-1}eg_2 = g_2^{-1}g_2 = e$.

Alltså ger konjugering en gruppverkan. För en gruppverkan av en ändlig grupp på en mängd X gäller i allmänhet att

$$|G| = |Gx| \cdot |G_x|.$$

I vårt fall är vi intresserade av banan under konjugering och vi får då att banans storlek ges av $|G|/|G_g|$. Stabilisatorn till g under konjugering ges av

$$G_g = \{h \in G | hgh^{-1} = g\}$$

vilket är detsamma som centralisatorn till g i G, dvs $C_G(g)$. Alltså ges banans storlek, dvs konjugatklassens storlek, av

$$\frac{|G|}{|C_G(g)|}$$

vilket skulle visas.

c). En cyklisk grupp genreras av ett enda element x och därmed bestäms en homomorfi från gruppen till vilken grupp som helst helt av vilket värde den tar på generatorn. Om vi ska få en automorfi av den cykliska gruppen måste generatorn avbildas på en annan generator. För att ta reda på de möjliga automorfierna behöver vi därför ta reda på precis vilka element som genererar gruppen. Vi kan konstatera att en cyklisk grupp har precis $\phi(d)$ element av ordning d för varje delare d till gruppens ordning. I vårt fall har vi alltså ett element av ordning 1, ett element av ordning 2, fyra element av ordning 5 och 4 element av ordning 10. Generatorerna är elementen av ordning 10, och om vi skriver Z_{10} som $\mathbb{Z}/10$ under addition får vi att $\{1, 3, 7, 9\}$ har ordning 10 eftersom dessa är de enda element som varken är delbara med 2 eller 5. Automorfigruppen ges alltså av

$$n \mapsto n, \quad n \mapsto 3n, \quad n \mapsto 7n \quad \text{och} \quad n \mapsto 9n$$

Detta utgör en abelsk grupp av ordning 4, och vi kan se att den är cyklisk eftersom $n \mapsto 9n$ är kvadraten av $n \mapsto 3n$. Detta är detsamma som den multiplikativa gruppen i $\mathbb{Z}_{10}$.

Mer allmänt har vi att automorfigruppen till en cyklisk grupp Z_n är isomorf med den multiplikativa gruppen i $\mathbb{Z}_n$. Denna behöver i sin tur inte vara cyklisk, tex för $n = 8$, då vi får att automorfigruppen är Kleins fyrgrupp.

d). Till att börja med måste antalet elment vara lika för att grupperna ska kunna vara isomorfa, dvs $ab = 34 \cdot 24 = 2^4 \cdot 3 \cdot 17$. Dessutom behöver vi enligt struktursatsen för abelska grupper ha faktorerna 2 och 2^3 i var sin faktor. Utöver detta kan faktorerna 3 och 17 ligga fördelade hur som helst. Vi kommer ändå att få att gruppen är isomorf med $Z_{8 \cdot 3 \cdot 17} \times Z_2$. Vi får därmed möjligheterna

$$(a, b) \in \left\{ \begin{array}{c} (8 \cdot 3 \cdot 17, 2), (8 \cdot 17, 2 \cdot 3), (8 \cdot 3, 2 \cdot 17), (8, 2 \cdot 3 \cdot 17), \\ (2 \cdot 3 \cdot 17, 8), (2 \cdot 17, 8 \cdot 3), (2 \cdot 3, 8 \cdot 17), (2, 8 \cdot 3 \cdot 17) \end{array} \right\}$$

e). Eftersom 5 delar $20!$ precis fyra gånger har vi att 5-Sylowdelgrupperna har ordning 5^4. På grund av Sylows sats vet vi att alla 5-Sylowdelgrupper är konjugerade och därmed isomorfa. Det räcker därmed att visa att det finns en abelsk 5-Sylowdelgrupp i S_{20}. Detta kan vi åstadkomma genom att ta produkten av fyra diskunkta cykler av ordning 5, dvs

$$H = H_1 H_2 H_3 H_4,$$

där

$$H_1 = \langle (1\,2\,3\,4\,5) \rangle, \quad H_2 = \langle (6\,7\,8\,9\,10) \rangle,$$
$$H_3 = \langle (11\,12\,13\,14\,15) \rangle \quad \text{och} \quad H_4 = \langle (16\,17\,18\,19\,20) \rangle.$$

Bedömningskriterier.

a) Korrekt definition av gruppverkan, **1 poäng**.

b)
- Korrekt motivering till att konjugering är en gruppverkan, **1 poäng**
- Korrekt motivering till banornas storlek, **1 poäng**

c)
- Korrekt beskrivning av homomorfierna, **1 poäng**
- Korrekt beskrivning av gruppstrukturen i automorfigruppen, **1 poäng**

d)
- Korrekt användning av struktursatsen för ändliga abelska grupper, **1 poäng**

e)
- Korrekt motiverade möjliga värden på (a,b), **1 poäng**
- Korrekt exempel på en abelsk 5-Sylowdelgrupp, **1 poäng**
- Korrekt motivering till att alla 5-Sylowdelgrupper därmed är abelska, **1 poäng**

---

(3) a) Definiera vad som menas med ett Euklidiskt område. **(1)**

b) Formulera Eisensteins irrucibilitetskriterium och ge ett belysande exempel på hur det kan användas. **(2)**

c) Kinesiska restsatsen ger att

$$k[x]/(x^2 - x) \overset{\sim}{=} k \times k.$$

Ge en explicit isomorfi mellan dessa ringar. **(2)**

d) Visa att de Gaussiska heltalen, $\mathbb{Z}[i]$, utgör ett Euklidiskt område med normen

$$N(a + bi) = a^2 + b^2.$$

(2)

e) Låt k vara en kropp och låt $k[[x]]$ vara ringen av formella potensserier i en variabel över k. Visa att $k[[x]]$ har precis ett maximalideal. **(2)**

---

a). Ett Euklidiskt område är en kommutativ ring, R, med etta som saknar nolldelare och som har en norm, $N : R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$, sådan att det för varje par av element a och $b \neq 0$ finns element q och r som uppfyller

$$a = qb + r, \qquad r = 0 \text{ eller } N(r) < N(b).$$

b). Eisensteins irreducibiltetskriterium säger att om ett moniskt polynom $f(x)$ med koefficienter i ett integritetsområde har alla övriga koefficienter i ett primideal P så är $f(x)$ irreducibelt om inte konstanttermen ligger i P^2.

Vi kan använda satsen på $\mathbb{Z}$ som är ett integritetsområde. Som primideal kan vi välja $P = (3) \subseteq \mathbb{Z}$ och får då att exempelvis $x^4 + 3x + 6$ är irreducibelt eftersom det är ett moniskt polynom där övriga koefficienter är delbara med 3, men där konstanttermen inte är delbar med 9.

c). För att ge en explicit isomorfi kan vi använda oss av isomorfisatsen som säger att vi kan börja med att ge en surjektiv homomorfi från $k[x]$ till $k \times k$ som har $(x^2 - x)$ som kärna. Vi kan göra det genom att skicka $f(x)$ på $(f(0), f(1))$. Detta är en homomorfi eftersom

$$\begin{aligned} \Phi(f(x) + g(x)) &= (f(0) + g(0), f(1) + g(1)) \\ &= (f(0), f(1)) + (g(0), g(1)) = \Phi(f(x)) + \Phi(g(x)) \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} \Phi(f(x) \cdot g(x)) &= (f(0) \cdot g(0), f(1) \cdot g(1)) \\ &= (f(0), f(1)) \cdot (g(0), g(1)) = \Phi(f(x)) \cdot \Phi(g(x)) \end{aligned}$$

På grund av att $\ker \Phi = (x^2 - x)$ får vi att Φ inducerar en isomorfi

$$\Psi : k[x]/(x^2 - x) \longrightarrow k \times k$$

genom

$$\Psi(f(x) + (x^2 - x)) = (f(0), f(1)), \qquad f(x) + (x^2 - x) \in k[x]/(x^2 - x).$$

d). Låt $a + ib$ vara ett nollskilt element i $\mathbb{Z}[i]$. Vi har då att $N(a + ib) = a^2 + b^2 \geq 1$. Genom att $i(a + ib) = -b + ia$ får vi att vi genom att dra bort heltalsmultipler av $a + ib$ och $-b + ia$ från ett godtyckligt element $c + id$ i $\mathbb{Z}[i]$ kan få ett element som ligger i den kvadrat som har hörn i punkterna $a + ib$, $-b + ia$, $-a - ib$ och $b - ia$. Alla element utom hörnen i denna kvadrat har norm som är strikt mindre än $a^2 + b^2$ eftersom hörnen har norm som är $a^2 + b^2$. Å andra sidan kan vi för hörnen reducera ytterligare till 0. Alltså finns en multipel av $a + ib$ som kan dras bort från ett godtyckligt tal så att resten får en norm som är strikt mindre än $a^2 + b^2$.

e). Det räcker att visa att varje potensserie med konstantterm skild från noll är inverterbar, eftersom det betyder att alla element som inte ligger i idealet (x) är inverterbara. Det betyder att (x) innehåller alla äkta ideal och därmed alla maximalideal. Om nu $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ är en potensserie med $a_0 \neq 0$. Vi söker nu en potensserie $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ som uppfyller

$$f(x)g(x) = 1.$$

Det betyder att $b_0 a_0 = 1$ och att

$$\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots.$$

Vi kan successivt bestämma $b_1, b_2, \ldots$ genom detta eftersom $a_0 \neq 1$ och vi har

$$b_i = -\frac{1}{a_0} \sum_{j=1}^{i} a_j b_{i-j}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots.$$

Därmed är $f(x)$ inverterbar och vi har att (x) är det enda maximalidealet i $k[[x]]$.

Bedömningskriterier.

a) Korrekt definition av Euklidiskt område, **1 poäng**.

b)
- Korrekt formulering av Eisensteins kriterium, **1 poäng**
- Korrekt exempel som visar hur det kan användas, **1 poäng**

c)
- Korrekt definierad homomorfi, **1 poäng**
- Korrekt motivering till att det är en isomorfi, **1 poäng**

d)
- Korrekt geometrisk beskrivning av mängden av rester, **1 poäng**
- Korrekt motivering till varför normen är mindre för resten, **1 poäng**

e)
- Korrekt motivering till att element utanför (x) är inverterbara, **1 poäng**
- Korrekt motivering till att detta innebär att (x) är det enda maximalidealet, **1 poäng**
