

F1: Grundläggande begrepp

29 augusti 2008

HELTAL: $0, 1, -1, 2, -2, 3, \dots$ bildar **heltalen**. Man kan säga att man först bildar talen $0, 1, 2, 3, \dots$ (de **naturliga talen**) och därefter bildar de negativa heltalen $-1, -2, -3, \dots$

RATIONELLA TAL: Dessa är av formen m/n , där m och n är heltal, samt $n \neq 0$. Vi identifierar vissa av dessa tal, t ex är $3/6 = 1/2$. Mer precist säger vi att $m_1/n_1 = m_2/n_2$ om $m_1 n_2 = m_2 n_1$. Dessutom kan vi jämföra storleken på två rationella tal, genom att säga att $m_1/n_1 < m_2/n_2$ om n_1 och n_2 är bägge positiva, samt $m_1 n_2 < m_2 n_1$ gäller.

DECIMALUTVECKLINGAR: De rationella talen kan identifieras med sina decimalutvecklingar. T ex har vi

$$\frac{5}{12} = 0.416666\dots, \quad \frac{2}{11} = 0.18181818\dots, \quad \frac{15}{7} = 2.142857142857\dots$$

Rationella och irrationella tal

PERIODISKA DECIMALUTVECKLINGAR: Vi ser av exemplen ovan att det verkar som att rationella tals decimalutvecklingar upprepar sig mot slutet, dvs de blir **periodiska**. Man kan visa att detta är fallet i allmänhet (detta kräver ett sofistikerat resonemang!). Observera att vissa tal kan ha två stycken decimalutvecklingar; t ex är

$$1 = 1.000\dots = 0.9999\dots$$

Vi väljer vanligtvis bland dessa decimalutvecklingen som slutar med nollor.

REELLA TAL: Vi kan införa de reella talen som bestående av alla möjliga decimalutvecklingar, med konventionen att talen inte får sluta med bara nior.

IRRATIONELLA TAL: består av de reella tal som inte är rationella, t ex $0.101001000100001\dots$ är irrationellt.

PRODUKTER, FAKTORISERING: Vi har att

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Speciellt gäller **kvadreringsregeln**

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

samt **konjugatregeln**

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Om vi går från vänster till höger pratar vi om att **utveckla uttrycket**. Ibland vill man även kunna gå från höger sida till vänster; då talar vi om **faktorisering**.

Vi har att

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

även då a, b, c, d står för algebraiska uttryck. Vid summation använder vi att

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Vi säger att vi bygger en **gemensam nämnare** för att kunna lägga ihop talen. Det är analogt med att lägga ihop kg, hg, och g: allt måste uttryckas i samma enhet innan vi summerar!

Linjära ekvationer i en variabel är lätta att lösa. Lite värre är det med andragradsekvationen

$$x^2 + px + q = 0,$$

där p och q är givna tal och vi söker x . Lösningen ser ut som

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Här behöver vi anta att $p^2 \geq 4q$, annars är det svårt att förstå vad kvadratrotuttrycket betyder. Lösningsformeln ovan är känd redan från den Babyloniska civilisationen. Metoden som leder till lösningen kallar **kvadratkomplettering**.

Relationen

$$y = kx + m$$

där x är variabel och k, m är givna tal, beskriver en rät linje i (x, y) -planet. k är riktningskoefficienten och beskriver hur brant linjen är, och m beskriver hur linjen är skjuvad uppåt eller nedåt.

Läs i 0.6 om Pythagoras sats, och varför kvadratroten ur 2 är irrationell. Läs om aritmetiska och geometriska medelvärden, samt vilket som är störst av dessa.