F10: Optimering. Iterationsmetoder.

30 september 2008

EXEMPEL: Bestäm största och minsta värdet på andragradspolynomet $f(x) = x^2 + 4x + 7$ över alla reella x. Kvadratkomplettering.

EXEMPEL: Bestäm längd och bredd på den rektangel med given omkrets som har störst area. Geometriskt-aritmetiskt medelvärde.

Optimering m h a derivatan

EXEMPEL: Beräkna största och minsta värde till funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x} - 2 + 2\arctan x$$

på intervallet $x \geq 1/\sqrt{3}$.

EXEMPEL: Vilken cylindrisk konservburk har minst area givet att volymen är fixerad?

Olikheter

EXEMPEL: Visa att

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Man betraktar

$$f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6},$$

och vill visa att $f(x) > 0$ på intervallet.

En iterationsmetod

FIXPUNKTSPROBLEM: Många ekvationer är det svårt eller närmast omöjligt att bestämma lösningarna till exakt. Ofta får man nöja sig med approximativa metoder. Anta t ex att vår ekvation är

$$x = F(x).$$

Detta kallas en **fixpunktsekvation**. Man kan försöka lösa den genom att gissa ett x_0 och sedan sätta

$$x_n = F(x_{n-1}).$$

SATS 1. Om I är ett intervall och F avbildar intervallet in i sig självt, och dessutom är strikt kontraherande (kontaktiv):

$$|F'(x)| \leq c, \qquad x \in I,$$

för något tal c med $c < 1$, så har ekvationen exakt en rot α på I, och $x_n \to \alpha$ då $n \to +\infty$.

Newton-Ralphsons metod

Vi vill nu lösa en ekvation av typen

$$f(x) = 0.$$

Idén är att skriva om problemet på fixpunktsform. Börja med en punkt x_0. Beräkna tangenten till f i punkten, och finn den punkt där tangenten har värdet noll. Denna punkt kallas x_1, och så fortsätter vi iterativt. Om vi skriver

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

är receptet

$$x_n = F(x_{n-1}).$$

Om α är roten och f har kontinuerliga derivator av ordning upp till 2 nära α, och dessutom $f'(\alpha) \neq 0$, så kommer Newton-Ralphsons metod att konvergera så länge som gissningen x_0 är tillräckligt bra.

En tillämning

PROBLEM: Visa att

$$\arctan x = \ln(1 + x)$$

har precis en positiv rot och ange en rekursionsmetod för numerisk beräkning av roten.