F16: Introduktion till integraler. Riemannsummor.

29 oktober 2008

Arean under kurvan med tecken

Vi har ett intuitivt begrepp om area. Vi tänker oss att bilda "arean under kurvan med tecken" genom att ge negativ area till de delar där funktionen är negativ (rita figur!). Men vi behöver ett mer stringent begrepp.

Trappfunktioner

En **trappfunktion** är en sträckvis konstant funktion. Om

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

är en lämplig indelning av intervallet $[a, b]$, så är en trappfunktion en funktion Φ med

$$\Phi(x) = c_k, \quad \text{då } \; x_{k-1} < x < x_k,$$

för $k = 1, 2, \ldots, n$, där c_k betecknar en konstant.

INTEGRAL AV TRAPPFUNKTION. Vi sätter

$$\int_a^b \Phi(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) c_k.$$

OBS. Rita för att förstå! Det är viktigt att förstå att om intervallindelningen blir finare ändras inte integralens värde!

Jämförelse med trappfunktioner

Antag att $f(x)$ är en funktion för vilken vi vill beräkna

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

vilket intuitivt betecknar arean (med tecken) under kurvan. Antag nu att $\Phi(x)$ och $\Psi(x)$ är trappfunktioner, sådana att

$$(1) \qquad \Phi(x) \leq f(x) \leq \Psi(x), \quad \text{för } x \in [a, b].$$

Då förväntar vi oss att

$$(2) \qquad \int_a^b \Phi(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \Psi(x)\,dx.$$

Klart är åtminstone att

$$(3) \qquad \int_a^b \Phi(x)\,dx \leq \int_a^b \Psi(x)\,dx.$$

Vänster sida i (3) kallas för **undersumma**, medan höger sida är **översumma**.

Optimering över trappfunktioner

Låt nu $I^-(f)$ beteckna **supremum** (generaliserat maximum!) av

$$\int_a^b \Phi(x)\,dx$$

där Φ löper över alla trappfunktioner Φ med $\Phi \leq f$. På samma vis betecknar $I^+(f)$ **infimum** (generaliserat minimum!) av

$$\int_a^b \Psi(x)\,dx$$

där Ψ löper över alla trappfunktioner med $f \leq \Psi$. Det är då klart att

$$I^-(f) \leq I^+(f).$$

Riemannintegralen

RIEMANNINTEGRALEN: Om $I^-(f) = I^+(f)$, säger vi att f är Riemannintegrerbar på $[a, b]$, och integralens värde är

$$I^-(f) = I^+(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

OBS: Vi observerar att denna definition av integralens värde inte har något gemensamt med förfarandet att ta en primitiv funktion och bilda differensen av ändpunktsvärdena av denna!

Integration av kontinuerliga funktioner

Hittills vet vi bara att trappfunktioner är integrerbara. Men det visar sig att alla kontinuerliga funktioner är integrerbara!

SATS. Om $f(x)$ är kontinuerlig på det ändliga intervallet $[a, b]$ så är $f(x)$ integrerbar på $[a, b]$.

(Ge lite ideer om hur man visar detta.)

Riemannsummor

RIEMANNSUMMA: Vi vill beräkna arean med tecken till funktionen $f(x)$ på intervallet $[a, b]$. Vi bildar delintervall

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

där $x_1 = a$ och $x_n = b$. Sedan väljer vi en punkt $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ på varje intervall. Motsvarande Riemann-summa blir

$$(4)\quad S_n = (x_1 - x_0)f(\xi_1) + (x_2 - x_1)f(\xi_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})f(\xi_n).$$

Rita figur för att illustrera!

Konvergens av Riemannsummor

SATS. Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$. Då gäller att Riemannsumman S_n konvergerar mot

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

förutsatt att intervallindelningen blir allt finare, dvs alla delintervall $[x_{k-1}, x_k]$ har längd som går mot noll samtidigt (likformigt).

EXEMPEL. Beräkna $\int_0^1 x\,dx$ och $\int_0^1 e^x dx$ med hjälp av Riemannsummor.