F2: Funktioner

2 september 2008

Funktioner

FUNKTION: En funktion är en automat som man stoppar in indata (mätvärde t ex) i och ut kommer utdata. Det viktiga är att vid upprepning av samma indata får vi också samma utdata.

DEFINITIONSMÄNGD: Detta är den mängd av indata vi tillåter, antingen på grund av naturliga begränsningar, eller av andra skäl.

VÄRDEMÄNGD: Detta är mängden av alla utdata vi får när vi stoppar in alla tillåtna indata.

GRAF: Vi försöker beskriva alla (tal)par $(a, f(a))$ där a ligger i definitionsmängden för funktionen f.

INJEKTIVITET: Om till varje b i värdemängden bara finns ett a i definitionsmängden så att $f(a) = b$, sägs funktionen f vara injektiv. I så fall bildar vi **inversfunktionen** $a = f^{-1}(b)$.

Absolutbelopp; triangelolikheten

ABSOLUTBELOPP: Om x är reellt skriver vi $|x|$ för talet som har samma utsträckning som x och alltid är ≥ 0. Dvs $|x| = \max(x, -x)$.

TRIANGELOLIKHETEN: $|x + y| \leq |x| + |y|$. Denna olikhet är enkel men mycket användbar. Den gäller även för vektorer, och då kan vi bättre förstå benämningen.

OMVÄNDA TRIANGELOLIKHETEN: $|(|x| - |y|)| \leq |x + y|$.

Aritmetiskt och geometriskt medelvärde

Om vi har reella tal $x_1, \ldots, x_n$ bildar vi det *aritmetiska medelvärdet*

$$m_a = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

Om dessutom alla talen är positiva bildar vi det *geometriska medelvärdet*

$$m_g = \left\{ \prod_{j=1}^{n} x_j \right\}^{1/n} = \left(x_1 \cdots x_n\right)^{1/n}.$$

Det geometriska medelvärdet kan aldrig bli större än det aritmetiska.

Polynom

POLYNOMDIVISION: Om P och Q är polynom, och P har större grad än Q, så finns ett polynom P_1 så att

$$P(x) = Q(x)P_1(x) + R(x),$$

där R är ett polynom av lägre grad än Q. Detta visas lättast genom att beskriva hur man går till väga. I princip är förfarandet analogt med vanliga divisionsalgoritmen från småskolan. P_1 är *kvoten* och R är *resten*.

NOLLSTÄLLEN. Låt x_0 vara ett nollställe till polynomet P, dvs $P(x_0) = 0$. Vi bildar $Q(x) = x - x_0$, och utför divisionsalgoritmen. Vi får att

$$P(x) = (x - x_0)P_1(x) + R,$$

där R är konstant. Instoppning av $x = x_0$ visar att $R = 0$, dvs

$$P(x) = (x - x_0)P_1(x).$$

Polynomet P_1 har grad som är en enhet mindre än P.

Polynom och rötter

RÖTTER. Antag att vi har hittat ett antal rötter till P, dvs $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Genom upprepning av tidigare resonemand får vi att

$$P(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_k) P_k(x),$$

där polynomet P_k har grad $n - k$, om n är graden på P. Om vi inte har fler rötter betyder det att P_k inte kan ha några nollställen alls. T ex kan vi tänka oss att $P_k(x) = x^2 + 1$.
Men om vi börjar jobba med komplexa rötter visar det sig att alla polynom av grad ≥ 1 har minst en rot. Successivt finner vi då att alla polynom är produkter av en konstant samt faktorer av typen $(x - x_j)$, där x_j är en (komplex) rot.

Geometrisk summa

Vi har att

$$1 + x + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},$$

förutsatt att $x \neq 1$.

Binomialsatsen

Vi har att

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n,$$

där

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

är binomialkoefficienter.

OBS: Pascals triangel!