F4: Trigonometriska funktioner

10 september 2008

Trigonometriska funktioner

RADIANER: I den här kursen kommer vi enbart att mäta vinklar i RADIANER. Radianbegreppet bygger på båglängden längs med enhetscirkeln.

SINUS, COSINUS: En punkt längs med enhetscirken där vinkeln i positiv led från punkten $(1,0)$ är t, har x-koordinat $\cos t$ och y-koordinat $\sin t$. Man ritar upp grafen på dessa funktioner, och ser att den ena är förskjuten i t-led från den andra. cosinus är jämn, medan sinus är udda.

TRIGONOMETRISKA ETTAN: Enligt Pythagoras sats har vi

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

PROBLEM 1: Lös $\sin 3x = \frac{1}{2}$. Lös sedan $\cos 5x = \cos 3x$.

Summaformler

SYMMETRI: Vi har att

$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x,$$

så cosinus är jämn och sinus är udda.

VINKELSUMMOR: Vi har formlerna

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

samt

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

SPECIALFALL: Om vi sätter $y = \pi$ får vi

$$\sin(x+\pi) = -\sin x, \qquad \cos(x+\pi) = -\cos x.$$

Sätter vi istället $y = \pi/2$ blir resultatet

$$\sin(x+\pi/2) = \cos x, \qquad \cos(x+\pi/2) = -\sin x.$$

Exempelproblem

PROBLEM 2: Lös $\cos^2 x + 3\sin^2 x = 2$.

PROBLEM 3: Lös $\cos 2x - \frac{5}{2}\cos x + \sin^2 x + 1 = 0$.

PROBLEM 4: Lös $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{3}$.

Tangens, cotangens

TANGENS: Vi definierar

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Tangensfunktionen får singulariteter då $\cos x = 0$. Observera att $\tan x$ får period π.

COTANGENS. Vi definierar

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Cotangensfunktionen får singulariteter då $\sin x = 0$. Perioden blir π, som för tangens. Dessutom är graferna för tangens och cotangens mycket lika: vi får den ena ur den andra via translation och spegling.

Arcusfunktioner

ARCSIN. Eftersom sinus är periodisk kommer värdena att upprepas oändligt många gånger. För att få en inverterbar funktion måste vi alltså avgränsa funktionen till ett visst intervall: vi avgränsar $\sin x$ till intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$. Vi sätter:

$$y = \sin x \text{ och } x \in [-\pi/2, \pi/2] \Leftrightarrow x = \arcsin y.$$

ARCCOS. På samma sätt gör vi med cosinus:

$$y = \cos x \text{ och } x \in [0, \pi] \Leftrightarrow x = \arcsin y.$$

ARCTAN. På samma sätt gör vi med tangens:

$$y = \tan x \text{ och } x \in [-\pi/2, \pi/2] \Leftrightarrow x = \arctan y.$$

HYPERBOLISKA FUNKTIONER. De trigonometriska funktionerna är associerade med cirkeln (ett kägelsnitt). På samma sätt är de hyperboliska funktionerna associerade med hyperbeln (ett annat kägelsnitt). Vi sätter

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

samt

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

Deras viktigaste egenskap är

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

vilken relation kallas *hyperboliska ettan*.