F8: Mer derivator. Medelvärdessatsen.

24 september 2008

Elementära funktioners derivator I

EXPONENTIALFUNKTIONEN: Vi minns standardgränsvärdet

$$\frac{e^t - 1}{t} \to 1 \quad \text{då} \quad t \to 0.$$

Ur detta kan vi härleda följande.

SATS 1: $De^x = e^x$.

LOGARITMFUNKTIONEN: Vi minns standardgränsvärdet

$$\frac{\ln(1+t)}{t} \to 1 \quad \text{då} \quad t \to 0.$$

Ur detta kan vi härleda följande.

SATS 2: $D \ln x = 1/x$ för $x > 0$.

Elementära funktioners derivator II

Alltså är $\ln x$ en funktion med derivata $1/x$ för positiva x. Men vad finns det för funktion som har derivatan $1/x$ om x är negativt? Enligt kedjeregeln gäller

$$D(\ln(-x)) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x},$$

så $\ln(-x)$ har just derivatan $1/x$ om x är negativt.

SATS 3: $D(\ln|x|) = 1/x$ om $x \neq 0$.

SATS 4: Om α är konstant, har vi $D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$ för $x > 0$.

PROBLEM: Beräkna $D(x^x)$.

Elementära funktioners derivator III

SATS 5: Vi har att

$$D \sin x = \cos x, \qquad D \cos x = -\sin x,$$

varur vi kan visa att

$$D \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad D \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Elementära funktioners derivator IV

SATS 6: Vi har att

$$D \sinh x = \cosh x, \qquad D \cosh x = \sinh x,$$

varur vi kan visa att

$$D \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}, \qquad D \cot x = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

Extremvärde: max och min

DEFINITION: En funktion f har ett lokalt maximum i punkten x_0 om det finns ett $\delta > 0$ så att

$$|x - x_0| < \delta \implies f(x) \leq f(x_0).$$

Om istället

$$|x - x_0| < \delta \implies f(x) \geq f(x_0)$$

så har funktionen ett lokalt minimum. En lokal extrempunkt är ett lokalt maximum eller lokalt minimum.

ANMÄRKNING: Om vi har strikt olikhet i maximum-fallet, dvs $f(x) < f(x_0)$ för x med $|x - x_0| < \delta$ och $x \neq x_0$, har vi ett strängt lokalt maximum. Analogt för strängt minimum.

Derivatakriteriet

SATS 7: Om funktionen f har ett lokalt extremvärde i en inre punkt x_0 (dvs ej randpunkt) på definitionsintervallet, och om $f'(x_0)$ finns, så gäller att $f'(x_0) = 0$.

ANMÄRKNING: Omvändningen gäller ej. Dvs villkoret $f'(x_0) = 0$ garanterar ej att x_0 är en extrempunkt. Tag t ex $f(x) = x^3$ och $x_0 = 0$.

Medelvärdessatsen

SATS 8: Antag f är kontinuerlig på $[a, b]$ ($a < b$ antas) samt deriverbar på $]a, b[$. Då finns en punkt $\xi \in]a, b[$ så att

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Medelvärdessatsens bevis

Bevis: Man inför

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

och kollar att g blir kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar i det inre $]a, b[$. Dessutom gäller att

$$g(a) = 0$$

samt

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0,$$

dvs g har värdet 0 i båda ändpunkterna a och b.

Medelvärdessatsens bevis forts

Eftersom f är kontinuerlig på ett slutet begränsat intervall $[a, b]$ finns max och min. Om maximum och minimum är lika är funktionen g konstant, och i så fall fungerar alla punkter $\xi \in]a, b[$. Om max och min är olika är åtminstone något av dessa skilt från 0 som är värdet i randpunkterna a och b. Antag att max är större än 0 (min blir analogt). Då antas max i en inre punkt $\xi \in]a, b[$, och enligt Sats 7 blir då $g'(\xi) = 0$. Om vi skriver om detta för f blir

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$