

Tentamensskrivning, 2009-12-18, kl. 08.00–13.00.

SF1602 Diffint (envariabel), för F.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För att tillgodoräkna sig resultat från denna del krävs minst 5 av 6 moduler godkända från Del 1. För betyg *A* krävs 28 poäng, för betyg *B* krävs 20 poäng, och för betyg *C* krävs 12 poäng. Lösningarna skall motiveras väl!

LÖSNINGSFÖRSLAG TENTAMENSSKRIVNING: DEL 2

11. I en keramikverkstad används en brännugn för att bränna leran. Temperaturen i brännugnen är 1000 grader Celsius. Lufttemperaturen i rummet är ca 25 grader Celsius. Efter att ha tagit ut ett kärl ur ugnen observerar man att efter 2 minuter har temperaturen fallit till 425 grader. Hur lång tid tar det tills man kan ta kärlet med händerna, om vi antar att man kan stå ut med att hålla det om temperaturen är nere i 55 grader Celsius. Vi förutsätter Newtons avkylningslag [som säger att avkylningshastigheten är proportionell mot temperaturskillnaden]. (5)

Låt $T = T(t)$ beteckna temperaturen på kärlet, och t tiden efter att kärlet togs ut. Vi har därvid $T(0) = 1000$, samt $T(2) = 425$. Newtons avkylningslag ger differential-ekvationen

$$T'(t) = -k(T(t) - 25),$$

med lösning

$$T(t) = 25 + C e^{-kt}.$$

Härvid måste

$$C = 975, \quad k = \frac{1}{2} \ln \frac{975}{400}.$$

Vi ska finna den tidpunkt t då $T(t) = 55$, dvs

$$t = \frac{1}{k} \ln \frac{C}{30} = 2 \frac{\ln \frac{975}{30}}{\ln \frac{975}{400}} \approx 3.9 \text{ min.}$$

12. Beräkna arean av den trattyta som bildas då kurvan

$$y = x^3, \quad 0 \leq x \leq 3,$$

roteras i rummet runt x -axeln. (5)

Arean ges här av formeln

$$2\pi \int_0^3 y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = 2\pi \int_0^3 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = 2\pi \left[\frac{1}{54} (1 + 9x^4)^{3/2} \right]_0^3$$

så svaret blir

$$\frac{\pi}{27} (730^{3/2} - 1).$$

13. Rita i stora drag grafen till funktionen

$$f(x) = \sin(x^2).$$

Bestäm därefter Maclaurinutvecklingen av funktionen. Beräkna slutligen med hjälp av denna $f^{(n)}(0)$. (5)

Funktionen $f(x)$ är jämn, och för stora x kommer "perioderna" allt tätare. Av praktiska skäl ritar vi ingen graf här. Maclaurinutvecklingen blir

$$f(x) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots$$

Härur följer att

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad n = 0, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, \dots,$$

samt att

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{(n/2)!}, \quad n = 2, 10, 18, 26, \dots,$$

medan

$$f^{(n)}(0) = -\frac{n!}{(n/2)!}, \quad n = 6, 14, 22, \dots$$

14. Betrakta kurvan i planet med parameterframställningen

$$(\cos t, \sin(2t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Rita kurvan i stora drag. Bestäm därefter det maximala avståndet till origo $(0, 0)$ för en punkt på kurvan. (5)

Kurvan bildar en s k lissajou-figur, i detta fall en liggande åtta som passerar genom origo som mitt för åttan. Om vi sätter $x = \cos t$ blir $\sin(2t) = \pm 2x\sqrt{1-x^2}$, och vi vill maximera kvadratroten ur uttrycket (Pythagoras' sats!)

$$\cos^2 t + \sin^2(2t) = x^2 + 4x^2(1-x^2) = 5x^2 - 4x^4.$$

Maximum erhålls då $x^2 = 5/8$, och maximala värdet blir $25/16$. Vi skulle ha kvadratroten ur detta, dvs $5/4$ blir maximala avståndet.

15. Lös följande differentialekvation fullständigt:

$$y'' - 2y' + y = x^2.$$

(5)

Enligt karakteristiska ekvationen blir den allmänna homogena lösningen

$$y_h = (C_1 + C_2x)e^x.$$

En partikulärlösning är

$$y_p = x^2 + 4x + 6.$$

Den allmänna lösningen till differentialekvationen blir därför

$$y = y_p + y_h = x^2 + 4x + 6 + (C_1 + C_2x)e^x.$$

16. Bestäm ekvationer för tangent och normal till kurvan $x^2 + y^3 = 5$ i punkten $(2, 1)$. (5)

- Implicit

derivering av ekvationen $x^2 + y^3 = 5$ ger att $2xdx + 3y^2dy = 0$. Stoppar vi in punkten $(2, 1)$ blir sambandet $4dx + 3dy = 0$. Ekvationen för tangenten blir härur

$$4(x - 2) + 3(y - 1) = 0.$$

Ekvationen för normalen blir istället

$$3(x - 2) - 4(y - 1) = 0.$$

17. Betrakta funktionen $f(x)$ som ges av formeln $f(x) = e^{-1/x}$ för $0 < x < +\infty$, och av formeln $f(x) = 0$ för $-\infty < x \leq 0$. Beräkna derivatorna $f'(x)$ och $f''(x)$ och visa att dessa är kontinuerliga överallt. Skriv därefter upp resultatet av Maclaurins formel (dvs Taylors formel runt $x = 0$) för $n = 1$ (linjärapproximation) inklusive restterm. (5)

Den givna funktionen är platt i $x = 0$, och man visar att $f^{(n)}(0) = 0$ gäller för alla positiva heltal n , samt att $f^{(n)}(x)$ blir kontinuerlig överallt. För att beräkna t ex $f'(0)$ bör man förlita sig på derivatans definition! Taylorpolynomet blir nollfunktionen, och resttermen blir lika med funktionen. Detta är ett degenererat men synnerligen intressant fall av Maclaurins formel!