

Tentamensskrivning, 2009-12-18, kl. 08.00–13.00.

SF1602 Diffint (envariabel), för F.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För betyg E krävs minst 4 av 6 moduler godkända (Del 1), och för betyg D krävs 5 av 6 moduler (Del 1). För högre betyg, se Del 2. Lösningarna skall motiveras väl!

LÖSNINGSFÖRSLAG TENTAMENSSKRIVNING: DEL 1

1. [MODUL 1] Visa med hjälp av induktion att

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

gäller för alla positiva heltal n (då blir ju den sista termen $2n - 1$ udda).

Man bildar påståendet $P(n)$ att likhet gäller för ett visst n . Därefter konstaterar man att likhet gäller för $n = 1$. Det viktigaste steget är att visa att $P(n)$ medför $P(n + 1)$, vilket involverar omskrivningen

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

-
2. [MODUL 2] Funktionen

$$f(x) = x^{-1/2} e^{-1/x}, \quad 0 < x < +\infty,$$

dyker upp i det fysikaliska studiet av värmefflöde. Bestäm samtliga lokala extrempunkter till funktionen samt skissa kurvan i stora drag.

Funktionens derivata blir

$$f'(x) = -\frac{1}{2} x^{-3/2} e^{-1/x} + x^{-5/2} e^{-1/x},$$

och man ser att funktionen växer strängt för $0 < x < 2$ och avtar strängt för $2 < x < +\infty$. Punkten $x = 2$ är därför både ett lokalt och globalt maximum. Vi ser att $f(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0$ och då $x \rightarrow +\infty$. Funktionen antar aldrig värdet 0, och har därför inget lokalt eller globalt minimum.

På grund av exponentialfunktionens egenskaper kommer $f(x)$ att vara synnerligen nära 0 då x är nära 0 (funktionen blir platt). Avtagandet i oändligheten styrs av $x^{-1/2}$.

Här avstår vi från att skissa kurvan.

3. [MODUL 3] Bestäm med hjälp av ett lämpligt variabelbyte alla primitiva funktioner till funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x + x^{1/3}}.$$

Vi ser att en allmän primitiv funktion blir

$$F(x) = \frac{3}{2} \ln(1 + x^{2/3}) + C.$$

4. [MODUL 4] Beskriv utsagan i analysens (integralkalkylens) huvudsats. Beskriv sedan hur denna används för att få fram instoppningssatsen. Illustrera analysens huvudsats samt instoppningssatsen med klargörande exempel.
-

Se läroboken, avsnitt 6.4.

5. [MODUL 5] Vi betraktar kurvan $y = x^2/2$ då $0 \leq x \leq 1$. Vi låter sedan kurvan rotera (i rummet) kring x -axeln. Bestäm den därvid uppkomna ytans area.
-

Eftersom $y' = x$ så blir mantelytan

$$2\pi \int_0^1 \frac{x^2}{2} \sqrt{1 + x^2} dx.$$

Denna integral går att beräkna med olika metoder, och med BETA till hands är det lätt.

6. [MODUL 6] Bestäm Maclaurin-polynomet (Taylorutveckling vid origo alltså) av grad 2 till funktionen $f(x) = (27 + x)^{1/3}$. Beskriv även resttermens storlek. Tillämpa detta på beräkningen av $28^{1/3}$. Hur många säkra decimaler får vi av Maclaurin-approximationen av grad 2?
-

Man beräknar att

$$f'(x) = \frac{1}{3} (27+x)^{-2/3}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} (27+x)^{-5/3}, \quad f'''(x) = \frac{10}{27} (27+x)^{-8/3}.$$

Vi får härur att

$$f(0) = 3, \quad f'(0) = \frac{1}{3^3}, \quad f''(0) = -\frac{2}{3^7}, \quad 0 < f'''(\theta) < \frac{10}{3^{11}},$$

förlutsatt att $0 < \theta < 1$. Maclaurins formel ger

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{1}{2} f''(0) + \frac{1}{6} f'''(\theta),$$

så att

$$28^{1/3} = 3 + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^7} + R_3,$$

där

$$0 < R_3 < \frac{5}{3^{12}}.$$

Man ser snabbt att $0 < R_3 < 10^{-5}$, vilket visar att vi nästan har 4 säkra siffror (åtminstone 3 helt säkra).