Tentamensskrivning, 2010-06-02, kl. 08.00–13.00.

SF1602 Diffint (envariabel), för F.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För betyg E krävs minst 16 p, för betyg D krävs 18 p, för betyg C krävs 22 p, för betyg B krävs 28 p, och för betyg A krävs 32 p. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING: DEL 1

1. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin^{88} x}{\sqrt{\ln\ln x}}.$$

(5p)

Täljaren är begränsad medan nämnaren går mot oändligheten. Svaret är 0.

---

2. Visa att serien

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

konvergerar för $s > 1$ och divergerar för $s \leq 1$. (5p)

Man kan t ex jämföra med motsvarande integral, genom att hänvisa till Cauchys integralkriterium.

---

3. Avgör hur många reella lösningar ekvationen

$$e^x + e^{-x} - 2 = Cx^2$$

har, beroende på värdet på konstanten C. (5p)

Man bildar funktionen

$$\frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2},$$

som har gränsvärde 1 i $x = 0$ (globalt minimum). Funktionen är strängt avtagande till vänster om $x = 0$, och strängt växande till höger om $x = 0$. Vi får alltså två punkter där värdet C antas om $C > 1$, och inga punkter där värdet antas om $C < 1$. Men svaret måste modifieras lite när vi jämför med den ursprungliga ekvationen. Alltså: om $C \leq 1$, finns bara lösningen $x = 0$, medan om $C > 1$ har vi tre lösningar (inklusive $x = 0$).

V.g. vänd!

4. Betrakta den kurva som fås av parametriseringen

$$(\sin(t), \cos(2t)), \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

rita kurvan. Bestäm därefter vilka punkter på kurvan som ligger närmast respektive längst ifrån origo $(0,0)$. (5p)

Om vi sätter $x = \sin t$ så blir $y = \cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t = 1 - 2x^2$ och kurvan blir parabeln $y = 1 - 2x^2$ med $-1 \le x \le 1$. Avståndet till origo i kvadrat blir

$$x^2 + y^2 = x^2 + (1 - 2x^2)^2 = 1 - 3x^2 + 4x^4.$$

Minimum erhålls för $x = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}$, $y = \frac{1}{4}$. Maximum erhålls för $x = \pm 1$, $y = -1$.

---

5. En solid kropp erhålles genom att låta området $0 \le y \le \sin x$, för $0 \le x \le \pi$, rotera runt y-axeln. Beräkna kroppens volym. (5p)

Enligt skivformeln blir volymen

$$V = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = 2\pi \Big[-x\cos x + \sin x \Big]_0^\pi = 2\pi^2.$$

---

6. Visa att

$$|x - \tan x| \le 3|x|^3, \qquad |x| \le \frac{\pi}{4}.$$

(5p)

Här jobbar man med resttermen i Taylorutvecklingen.

---

7. En viss kemikalie löses upp i vatten med en hastighet som är proportionell mot produkten av den oupplösta mängden och differensen mellan koncentrationen i en mättad lösning och den aktuella koncentrationen. Man vet att i 100 ml mättad lösning är 50 g av kemikalien löst. Om 30 g av kemikalien rörs ned i 100 ml rent vatten vatten så löses 10 g på 2 timmar. Hur mycket har lösts upp efter 5 timmar? (5p)

Vi får om x är den upplösta mängden (i gram) att

$$\frac{dx}{dt} = c(30-x)\left(\frac{50}{100} - \frac{x}{100}\right) = c'(30-x)(50-x)$$

med $c' = c/100$. Vi har att $x(0) = 0$. Man löser DE och använder initialdata:

$$x = 30\frac{1-e^{-c''t}}{1-\frac{3}{5}e^{-c''t}}.$$

Vi använder nu att $x(2) = 10$, så att $e^{-2c''} = \frac{5}{6}$. Detta ger

$$x(5) = 30\frac{1-(\frac{5}{6})^{5/2}}{1-\frac{3}{5}(\frac{5}{6})^{5/2}}.$$

---

8. Låt funktionen $f(x)$ ges av att $f(x) = 0$ för $x < 0$, $f(x) = x$ för $0 \le x \le 1$, samt $f(x) = 2$ för $x > 1$. Finn explicit (!!) en primitiv funktion $F(x)$ till $f(x)$ med $F(0) = 0$. (5p)

Vi får att $F(x) = 0$ för $x \le 0$, $F(x) = x^2/2$ för $0 \le x \le 1$, samt $F(x) = 2x - \frac{3}{2}$ för $x > 1$.