Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kompletteringskurs till Linjär algebra , 5B1110, måndagen den 18 augusti 2003 klockan 08.00-11.00.

Tillåtna hjälpmedel: INGA HJÄLPMEDEL ÄR TILLÅTNA.

Gränser: 9 poäng ger betyget tre, 13 poäng ger betyget fyra och 17 poäng ger betyget fem.

PROBLEM

1. a) (2p) Definiera vad som menas med att en mängd vektorer utgör en bas för ett vektorrum V.
   b) (2p) Betrakta vektorrumet R^5. Låt L beteckna delrummet

$$span\{(1,1,1,1,1),(1,2,-1,2,1),(1,0,2,0,1),(0,1,1,1,0),(3,2,1,2,3)\}$$

och bestäm en bas för detta delrum.

2. (4p) Visa att

$$4^{2n}-1$$

är delbart med 15 för alla naturliga tal $n \geq 1$.

3. (4p) Betrakta rummet P_2 av polynom av grad högst två med den inre produkten

$$< f(t) \mid g(t) >= \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Bestäm ett polynom i detta rum som är ortogonalt mot de bägge polynomen $f(t) = 1$ och $g(t) = 2t - 1$.

4. (4p) Betrakta en linjär avbildning A från R^4 till R^4 som relativt standardbasen beskrivs av matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Undersök om det finns vektorer x, y och b i R^4 sådana att

$$\begin{aligned} A(x) &= b \\ A(y) &= b \\ x - y &= c. \end{aligned}$$

där $c = (1,2,1,1)$.

V.G.V.

5. (4p) Vilka av följande funktioner från $R^3 \times R^3$ till R^3 kan användas som inre produkt?

a) $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$.

b) $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 + y_1 + x_2 + y_3$.

c) $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 0$.

d) $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$.