Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kompletteringskurs till Linjär algebra, 5B1110, måndagen den 16 augusti 2004 klockan 08.00-11.00.

Tillåtna hjälpmedel: INGA HJÄLPMEDEL ÄR TILLÅTNA.

Gränser: 9 poäng ger betyget tre, 13 poäng ger betyget fyra och 17 poäng ger betyget fem.

PROBLEM

1. (4p) Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 < n^3,$$

för alla naturliga tal $n \geq 2$.

2. (4p) Låt $T : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$, (där $\mathcal{P}_i$ är vektorrummet bestående av alla polynom av grad högst i) vara avbildningen $(T(p))(x) = x \cdot p(x)$.

a) (2p) Visa att avbildningen T är linjär.

b) (2p) Låt $B_1 = \{1, x\}$ och $B_2 = \{1, x, x^2\}$ vara en bas i $\mathcal{P}_1$ respektive $\mathcal{P}_2$. Bestäm den matris som beskriver avbildningen relativt dessa baser.

3. (4p) Ange en bas för det delrum av $\mathcal{P}_3$ som spänns upp av vektorerna $p_1(x) = 1 + x + x^2$, $p_2(x) = 2 + x^3$, $p_3(x) = 4 + 2x + 2x^2 + x^3$ och $p_4(x) = 2x + 2x^2 - x^3$.

4. (4p) Ge ett exempel på en ortogonalmatris av formatet 4×4 och som inte innehåller någon nolla.

5. a) (2p) Definiera vad en inre produkt är.

b) (2p) Låt oss försöka definiera en inre produkt på vektorrummet bestående av alla polynom definierade på intervallet $[0, 1]$ av grad högst 2. Visa varför

$$< f, g >= f(0)g(0) + f(1)g(1)$$

inte fungerar.